DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Szabó Balázs

Pécs, 2022

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

GAZDÁLKODÁSTANI DOKTORI ISKOLA

Szabó Balázs

Piacszerkezet és hálózati struktúra kapcsolata egy egyszerű többszereplős piacszerkezeti modellben

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Témavezető: Dr. Sebestyén Tamás

Pécs, 2022

Tartalomjegyzék

Táblázatok jegyzéke III

Ábrák jegyzéke III

Köszönetnyilvánítás

1 Bevezetés 1

1.1 Kutatási kérdések 5

1.2 Feldolgozott szakirodalmak, források 7

1.3 Alkalmazott módszertan 7

1.4 A dolgozat felépítése, szerkezete 9

2 Egyensúlyról és piacszerkezetekről általában 11

2.1 Általános egyensúlyelmélet 13

2.2 További egyensúly-koncepciók 15

2.2.1 Stratégiai játék és Nash-egyensúly 15

2.2.2 Stratégiai játékok kevert kiterjesztése és kevert Nash-egyensúly . 16

2.3 Fontosabb gazdaság- és piacszerkezeti modellek 17

2.3.1 Dixit–Stiglitz-modell 18

2.3.2 Input-output modellek 19

2.3.3 Cournot-féle modell 21

2.3.4 Stackelberg-féle modell 25

2.3.5 Bertrand- és Bertrand–Edgeworth-féle modell 28

3 Piacszerkezetek és heterogenitás a modellezésben 31

3.1 Heterogenitás és ágens-alapú modellek 34

3.2 Heterogenitás, játék- és hálózatelméleti megközelítés 35

4 Az alapmodell bemutatása 47

4.1 Az alapmodell feltevései, alapvető következményei és az egyensúly bevezetése 49

4.2 Termelői egyensúlyi árak létezése és egyértelműsége 59

4.3 Speciális esetek, következmények és példák 67

4.4 Struktúraelemzés és centralitás 75
4.4.1 Kiegészítő megjegyzés: az egyensúlyi árak alternatív felírása . . . 81
4.5 Fogyasztás, kibocsátás és nyereség 82
4.5.1 Kiegészítő megjegyzés: fontos kiegészítés a kapcsolati mátrixhoz 88
4.6 További illusztratív példák 90

5 Alternatív modellek, kiegészítő szimulációk és empirikus hálózatbecslés 101
5.1 Első modellváltozat 103
5.2 További modellváltozatok 106
5.2.1 Ármeghatározás a második modellváltozatban 107
5.2.2 Ármeghatározás a harmadik modellváltozatban 110
5.3 A kapcsolati mátrix generálásának elméleti megalapozása 112
5.4 Kiegészítő szimulációk: az interakciós hálózati szerkezet és az egyensúlyi értékek viszonya 116
5.5 Az interakciós hálózati szerkezet becslése valós áreloszlás alapján 133
5.5.1 A paraméterbecslés első lépése 135
5.5.2 A paraméterbecslés véglegesítése 139

6 Összegzés, következtetések 143
6.1 Első kutatási kérdés megválaszolása 144
6.1.1 Első kutatási alkérdés megválaszolása 144
6.1.2 Második kutatási alkérdés megválaszolása 144
6.1.3 Harmadik kutatási alkérdés megválaszolása 145
6.1.4 Negyedik kutatási alkérdés megválaszolása 145
6.2 Második kutatási kérdés megválaszolása 146
6.3 Harmadik kutatási kérdés megválaszolása 147
6.4 Záró gondolatok, kitekintés 148

Felhasznált irodalom 151

Függelék 161
A Módszertani függelék 161
A.1 Vegyes fogalmak és eredmények 161
A.2 Fontosabb hálózatos fogalmak 163
B Az egyensúlyi árvektorral kapcsolatos kiegészítő bizonyítások 163
B.1 Bizonyítás a Banach-féle fixpontétel segítségével 164
B.2 Bizonyítás variációs egyenlőtlenség segítségével 166
B.3 Bizonyítás a Perron–Frobenius-tétel segítségével 168

Táblázatok jegyzéke

3.1. Modellek összevetése adott szempontok szerint 45
5.1. Korrelációs mátrixok tartalmának összefoglalása 126
5.2. Egyensúlyi termékáreloszlások kurtózisai 127
5.3. Egyensúlyi kibocsátás-eloszlások kurtózisai 127

Ábrák jegyzéke

4.1. Egy konkrét kapcsolati mátrix illusztrációja 51
4.2. Első gráfreprezentáció 92
4.3. Második gráfreprezentáció 94
4.4. Harmadik gráfreprezentáció 95
4.5. Negyedik gráfreprezentáció 97
4.6. Ötödik gráfreprezentáció 98
5.1. Fokszámeloszlások hisztogramjai ($I_1 = 1, I_2 = 0$) 115
5.2. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, első eset) 118
5.3. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, első eset) 118
5.4. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, második eset) 119
5.5. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, második eset) 119
5.6. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, harmadik eset) 120
5.7. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, harmadik eset) 120
5.8. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, negyedik eset) 121
5.9. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, negyedik eset) 121
5.10. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, első eset) 122
5.11. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, első eset) 122
5.12. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, második eset) 123
5.13. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, második eset) . . 123
5.14. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, harmadik eset) 124
5.15. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, harmadik eset) . . 124
5.16. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, negyedik eset) 125
5.17. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, negyedik eset) . . 125
5.18. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, első eset) 129

5.19. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, második eset) 129
5.20. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, harmadik eset) 130
5.21. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, negyedik eset) 130
5.22. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, első eset) 131
5.23. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, második eset) 131
5.24. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, harmadik eset) 132
5.25. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, negyedik eset) 132
5.26. A munkabér értékének alakulása 136
5.27. Az átlagolt szórás szintvonaltérképe 137
5.28. Az átlagolt szórásra illesztett extrapolációs polinom grafikonja ($I_2 \leq 1{,}5$) . 138
5.29. Az átlagolt ferdeség és kurtózis szintvonaltérképe 139
5.30. Az átlagolt szórás, ferdeség és kurtózis kapcsolata az árérzékenységi paraméter szórásával 140
5.31. A munkabér értékének alakulása az árérzékenységi paraméter heterogenitása mellett 141

Absztrakt

A doktori értekezés szerzője: **Szabó Balázs**

Címe: **Piacszerkezet és hálózati struktúra kapcsolata egy egyszerű többszereplős piacszerkezeti modellben**

Témavezető: **Dr. Sebestyén Tamás, egyetemi docens**

Doktori értekezésemben egy olyan piacszerkezeti modellt vizsgálok, amelyben kifejezetten nagy hangsúlyt kap az egyes szereplők (termelők és fogyasztók) kapcsolatrendszere. Ez ugyan a szakirodalomban ugyan nem ismeretlen, ettől függetlenül törekedtem arra, hogy a bemutatott modell felépítésében legyen újdonság egyes általam elemzett szakirodalmakhoz képest. Célom, hogy egy viszonylag egyszerű feltételrendszerből és modellből kiindulva minél többet megtudjak a szóban forgó kapcsolatrendszer, más néven interakciós hálózati struktúra, és az árak, továbbá kibocsátások viszonyáról, ezek heterogenitásának alakulásáról. A dolgozat alapmodellje rámutat, hogy aszimmetrikus kapcsolatrendszert feltételezve is létezik egyensúlyi árvektor, valamint az egyes fogyasztók által támasztott keresletek és a termelői kibocsátások nemnegatívak. Az említetteken túl több számpéldát elemezve, mélyebb betekintés kaphatunk a különféle hálózati szerkezetek és az egyensúlyi árak illetve kibocsátások összefüggésébe. Az elemzés tekintetében különösen fontos mindazon szimuláció, amely hátterében nagyobb méretű interakciós hálózati struktúra húzódik meg. Ezeknek a szimulációknak a segítségével a modelljellemzők, a heterogenitás és az eloszlás összefüggésére is kitérek, amely vizsgálódásban a hálózati sűrűség kiemelt jelentőséggel bír. Végül dolgozatomat azzal zárom, hogy kísérletet tesz egy empirikus jellegű elemzés keretében a mögöttes termelői és fogyasztói kapcsolatrendszer feltérképezésére.

Journal of Economic Literature (JEL) kódok: C72, L11, L13, L14

Tárgyszavak: *interakciós hálózati szerkezet, egyensúlyi árvektor, termelői kibocsátások, heterogenitás*

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni segítő támogatását, javaslatait és észrevételeit témavezetőmnek, Sebestyén Tamásnak. Szintén köszönöm Komlósi Sándor professzor úrnak és Bessenyei Istvánnak, hogy megosztották velem véleményüket, hasznos tanácsaikat akár személyesen, akár szemináriumi keretek között. Vörös József professzor úrnak pedig azt köszönöm, hogy több éven keresztül részt vehettem az általa vezetett kutatócsoport munkájában, amely jelentősen hozzájárult a elvárt publikációk megszületéséhez. Továbbá hálával tartozom Bélyácz Iván professzor úrnak is, amiért biztatott doktori tanulmányaim elkezdésére. Végül, de nem utolsósorban köszönet illeti szüleimet, mert mindvégig támogattak tanulmányaim alatt.

1. Bevezetés

Napjaink egyik sokat hangoztatott jelszava a globalizáció, tágabb környezetünket mármár közhellyé silányodott módon „globális faluhoz” szokás hasonlítani. Rendszereink, társadalmaink kétségkívül összetettek, és e komplexitás tekintetében a gazdaság sem kivétel. Ezen struktúrák vonatkozásában a heterogén szereplők interakcióitól magától értetődő módon nem lehet eltekinteni. Ugyanakkor számos gazdaság- vagy piacmodellezéssel kapcsolatos szakirodalom ezt a sajátságot – vélhetően a könnyebb kezelhetőség érdekében – nem veszi figyelembe. Vagyis a heterogenitás, a szereplői interakciók és az ehhez kapcsolódó struktúra ezekben a munkákban nincs hangsúlyozva, ami egyes esetekben minden bizonnyal nagyfokú pontatlanságot eredményez. A gazdaság szereplői döntéseiket ugyanis részint a múltbéli tapasztalatokra, részint pedig az észlelt piaci jellemzők aggregátumaira alapozva hozzák meg, és ez meglehetősen komplex, a hagyományos módszertani eszközökkel sokszor nehezen vizsgálható szituációkat eredményez (Tesfatsion 2001). Fontos tehát olyan modellek megalkotása, amelyek a gazdaságot komplex rendszerként kezelik. Amint azt alább látni fogjuk, az utóbbi érdekében történtek már lépések, amely diskurzushoz jómagam is innovatív módon csatlakozni kívánok. Hozzájárulásom a termelők/eladók és fogyasztók/vevők alkotta piaci hálózatnak az árazással, kibocsátással kapcsolatos kérdéseit taglalja, ebben fog újat mondani.[1] Dolgozatomban megjelenő többszereplős játék- és hálózatelméleti irányultságú modell a piacszerkezetek témáján belül foglal helyet. Mindazonáltal az elméleti dominancia mellett az empíriát sem hagyom figyelmen kívül, ilyen jellegű vizsgálódások tekinthetők munkám másik lábának.

A disszertáció témájának aktualitását, a már említetteken felül, az is indokolja, hogy a 2007–2008-as pénzügyi válság – Galí (2008) munkájában is részletesen tárgyalt – új-keynesi típusú modellek felülvizsgálatára késztette a közgazdászokat (Békési et al. 2016). Ez a felülvizsgálat konkrétan kiterjedt olyan jól ismert és a gazdaságra közvetlen hatással lévő – szakpolitikák szempontjából fontos – makrogazdasági összefüggésre, mint amilyen a Phillips-görbe (Szentmihályi és Világi 2015). Magához a szóban forgó folyamathoz szorosan kapcsolódnak a heterogén szereplős új-keynesi (HANK-) modellek, amelyeknek az egyik kulcsfontosságú feltételezése a fogyasztási határhajlandóságokban való heterogenitás (Acharya és Dogra 2020). Ezek a modellek ugyan felismerik a szoká-

[1] E ponton megjegyzem, hogy noha a termelő/eladók és fogyasztó/vevők kifejezést túlságosan egyoldalúnak illetve leegyszerűsítőnek tartom, a dolgozatban ezeket mégis számtalan helyen ezt használom. Ennek indoklása kapcsán legyen elég annyi – túl a szóban forgó terminusok szakmai körökben történő bevett alkalmazásán –, hogy ezek bizonyos szempontból (sajnos) mégis egészen jól illeszkednek korunk jelenségeihez.

sos szimmetria és egyensúlyi feltevésekre épített „jól viselkedő” világ hátulütőit, bennük azonban még nem jelenik meg az a fajta explicit piaci struktúra, amely egy játékelméleti vagy hálózatos megközelítésben tetten érhető, és amely nézőpontot a szakirodalom feldolgozása során munkám kereteit szem előtt tartó részletességgel ismertetek is. Ennek során látható lesz, hogy disszertációm egy olyan részterülethez csatlakozik, amely szakirodalmi kutatásom tanúsága szerint jelentőségében csekélynek egyáltalán nem nevezhető. Ez a részterület azonban maga is szerteágazó. Jómagam ehhez egy speciális szempontok szerint megkonstruált – az információs aszimmetriát figyelembe vevő – piacszerkezeti modellel, annak bizonyos következményeivel és a piaci jelenségek egy jól meghatározott körének (heterogenitás) lehetséges magyarázatával járulok hozzá. Még konkrétabban, a dolgozat elsősorban az árazással foglalkozik, noha annak fontos része a kibocsátás és nyereség alakulása is. Azt vizsgálom, hogy ha a piaci szereplők csak az árak egy részhalmazát ismerik, döntéseiket ehhez igazítják, akkor ez a heterogén döntési környezet milyen módon tükröződik az árakban, azon heterogenitásában. Ez az orientáció fontos, hiszen a nagyméretű valós hálózatok önszerveződése jobbára aszimmetrikus, skálafüggetlen struktúrát eredményez (Barabási és Albert 1999; Barabási et al. 1999, 2000). A gazdaság- és piacmodellezésben tehát igenis helye van a szereplők heterogenitása mellett a hálózati aszimmetriának, a hálózati szerkezet hatáselemzésének is, különösen decentralizált piacok vonatkozásában, ahol a helyi kapcsolatok alakulása döntő lehet (Acemoglu et al. 2012). Kifejezett célom tehát a dolgozattal, hogy az elméletet és a tapasztalati valóságot valamiképpen közelítsem, tudva, hogy e kettő soha meg nem egyezhet, így az említett „szakadék” sohasem teljesen áthidalható.

Az eddig leírtakból véleményem szerint egyértelműen látszik, hogy nem élek a reprezentatív szereplő feltételezésével, mint egyes közgazdasági modellcsaládok (lásd például Galí 2008, Kónya 2015). Ehelyett – amint azt alább látni fogjuk – a szereplőket heterogenitás jellemzi, amely persze egyben módszertani összetettséget és nehézséget is jelent majd. Ennek ellenére, amint arra már utaltam, bizonyos szempontból valósághűbb képet kapunk így, mint akkor, ha a reprezentativitás feltételét fenntartjuk.

Ezen a ponton fontosnak tartom, hogy néhány gondolat erejéig elidőzzek a társadalomtudományi modellek egyfajta természetrajzánál. E tekintetben álljon itt egy munkám során folyamatosan szem előtt tartatandó idézet:

> „[E]lég biztosan állítható, hogy a tudományos objektivitásnak azt a fokát, amelyet a legtöbb természettudomány elért, a társadalomtudományok sohasem fogják elérni.
>
> Ilyen és hasonló okok miatt a matematikai közgazdaságtani modellek sem valós, megfigyelt tényekre, hanem fiktív feltevésekre épülnek, sem az axiómaként elfogadott feltevéseik, sem előrejelzéseik helyessége nem igazolható

> empirikusan. Mindezek ellenére nem tagadható a spekulatív elméletek potenciális hasznossága, és nem mondanak ellent annak a követelménynek, hogy a társadalomtudományok terén is törekedni kell a szabatos fogalmak, és ahol lehet, axiomatikus elméletek használatára, illetve ok-okozati összefüggések feltárására, amelyek alkalmasak bizonyos folyamatok előrejelzésére." (Zalai 2014: 905)

Tehát a spekulatív jelleg ellenére ez elméleti közgazdaságtani eredmények hordoznak, hordozhatnak olyan értékeket, amelyek a citált szöveg szerint az alábbiakban öltenek testet:

1. fogalmi szabatosság;
2. egyfajta kauzális rendszer felmutatása.

Azt gondolom tehát, hogy az elméleti közgazdaságtani modellek megismerése, valamint ennek az ismerethalmaznak a bővítése nem ódivatú, idejétmúlt, egy, a gyakorlattal igazán sohasem komfortontóáldó akadémiai réteg időtöltése. Pontosan emiatt tartom fontosnak saját hozzájárulásomat, kutatásomat is. Ezzel együtt hangsúlyozottan ki szeretném emelni a matematikai apparátus fontosságát, hiszen ez teszi lehetővé, hogy olyan összefüggéseket fogalmazzak meg, amelyek plauzibilis premisszák esetében az adott rendszer keretein belül koherensek és konzisztensek, ezért elméletileg megalapozott[2] feltételek mellett figyelemre méltóak. Ugyanis a társadalom és gazdaság nagyfokú változékonysága jelentős mértékben korlátozzák, lehatárolják a statisztika és ökonometria módszereinek alkalmazhatóságát (Révész és Zalai 2012). Azonban nem szabad a modellt a valósággal illetéktelenül összemosni, a modell határainak megjelölésével fenn kell tartani azt a feszültséget, amely a jelenség és annak elméleti „lecsapódása" között van (lásd Sutton és Staw 1995; Weick 1995). Mégis megfontolandó az alábbi:

> „Az empirikus kísérletezés és a versenyző elméletek előrejelzéseinek tesztelésének lehetősége a társadalomtudományok területén meglehetősen korlátozott. Emiatt az egymással ellentétes iskolák és vélemények makacsul túlélnek egymás mellett (...) Annyi bizonyos, hogy a verbális elméletek formalizált, axiomatikus kifejtése élesebb megvilágításba helyezi az egyébként gyakran csak homályosan megfogalmazott állításokat, elősegíti azok érvényességi feltételeinek és korlátjainak tisztázását, és lehetővé teszi olyan következtetések feltárását is, amelyeket a matematikai levezetés nélkül minden

[2] Révész és Zalai (2012) cikkében említett, bizonyos elméleti közgazdasági modellekkel tekintetében megfogalmazott elvárások egyike (a pontosság kedvéért megjegyzem, hogy a szerzőknél a megalapozottság igénye konkrétan a modellben szereplő matematikai függvényekre irányul).

> bizonnyal fel sem lehetne fedezni. (...) Ezért nincs értelme a matematika szerepéről elvi szinten vitatkozni, legfeljebb csak arról, hogy »mennyit« és »milyen« matematikát használjunk az elméleti tisztánlátás és a gyakorlati felhasználás érdekében." (Zalai 2011: 9–10)

Az eddigiekből levonva a megfelelő következtetéseket, a közgazdasági modellalkotás tekintetében az alábbi lépéseket szükséges szem előtt tartani:

1. a modell feltevéseinek empirikus-intuitív illetve a szakirodalommal összhangban lévő megalapozása;

2. a matematikai modell megalkotása, annak vizsgálata, elemzése.

Következésképpen egy modell helyessége – a matematikai apparátus korrekt alkalmazásán túl – az első pont elfogadhatóságán, vagyis az empirikus alátámasztottságon és a szakmai konszenzuson is múlhat. Ebből a szempontból fontos tehát ismerni a szakirodalmat, hiszen elsősorban ez lehet az a referenciapont, amire építhetünk. Az irodalomban található – a vizsgált kérdéskörhöz szorosan kapcsolódó – adekvát diskurzussal való összhang persze önmagában még kevés az elméleti konstrukció helyállóságának kimondásához. Mégis, ha a vizsgált problémakör tekintetében konszenzus uralkodik a szakirodalmon belül, akkor ez az ehhez társuló újabb eredmények elfogadhatóságát növelni fogja.

Azonban sosem feledkezhetünk meg arról, hogy a modell legjobb erőfeszítéseink ellenére is modell marad. A valóságot a maga teljességében nem képes megragadni, mivel óhatatlanul egyes részeket kiemel, míg másokat figyelmen kívül hagy, háttérbe szorít. Ez pedig azt jelenti, hogy számos esetben csak a „külsődleges" összefüggések szintjén tud valamit kimondani, ami tehát így mindig a valóság „homályos" képét mutatja. Példaként megemlítem, hogy az elméleti, matematikai – és egyéb, természetük szerint algoritmizálható – modellek a szereplők alapvető és lényegi kvalitatív jellemzőit nem veszik figyelembe, hiszen a módszertan természetéből következően erre képtelenek. Így az aktorok „belső" viszonyulása, szabadsága teljesen eltűnik ezekből – legfeljebb valószínűségi változók, sztochasztikus folyamatok szintjére redukálódik. Következésképpen ezek a modellek – ahogy minden modell – csupán részleges érvényűek. Mindezt fontosnak tartom már munkám elején, az eddigiekre való tekintettel leszögezni, pontosan azért, hogy az olvasó kellő kritikával fogadhassa a további sorokat. Ezenkívül pedig azért is, mert osztom azt a meglátást, hogy a modern közgazdaságtan számos területének alapvetően hibás az antropológiai megközelítése (Gárdonyi 2018). Ugyanis meglehetősen úgy tűnik, hogy mindmáig él Adam Smith-nek Thomas Hobbes mechanikus materialista gondolkodó önzéselméletre épített gazdaságelmélete (Nyíri 1977). Az említett szemléletmódbeli örökség pedig még inkább alátámasztja a korábban írottakat.

A fentieket a lehetőségekhez mérten szem előtt tartva, a mindennapi élet tapasztalataiból kiindulva, a dolgozatban központi helyet elfoglaló modell egyrészt arra a jelenségre épít, hogy a modern piacgazdaságokban a fogyasztók számos termék közül választhatnak, azonban mégsem vesznek minden lehetségesből. Másrészt az is tény, hogy döntéseik meghozatala során e fogyasztók mérlegelnek is, és ez az esetek egy részében vélhetően abban fejeződik ki, hogy összehasonlítanak azonos típusú vagy jól helyettesíthető termékeket, és ezek közül az olcsóbbikat veszik meg. Ezenkívül – egy bizonyos termékkör esetében – a viszonylag olcsóbb termékekből minden bizonnyal többet, míg a drágábbakból kevesebbet fogyasztanak. Röviden összegezve, adva vannak termelők (tágabb értelemben eladók), azonban ezek nem állnak kapcsolatban az összes fogyasztóval (értsd, a fogyasztók nem vásárolnak minden egyes termékből), illetve fogyasztási döntéseik egy részének meghozatala során az árak alapján mérlegelnek. Ezek megfontolások képezik modellem fő építőköveit.

Megjegyzem, egyes kutatások, tanulmányok azt támasztják alá, hogy az imént jelzett árérzékenység nem minden esetben igaz (lásd Mohammed 2018). Modellem tehát nem alkalmazható minden fogyasztói döntésre. A hivatkozott cikk alapján előfordulhat ugyanis, hogy e döntéseket a termékáron kívül a termék (úgynevezett) minősége is befolyásolja. Utóbbi mellett érvel például Vörös (2019) a cikkében bemutatott modell tekintetében. Azt sem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a – különösen az alkalmazott közgazdaságtanon belül – nagy jelentőségre szert tett a relatív termékár (azaz egy árindexhez viszonyított termékár) (lásd Galí 2008) modellezési, előrejelzési szempontból fontos szerepet tölt be.

Mindezzel azt gondolom, kellően megalapoztam kutatásomat aktualitását. Rámutattam továbbá motivációm hátterére is. Ezen a ponton logikusan adódik a következő lépés, vagyis a lehetséges kutatási kérdések felsorolása.

1.1. Kutatási kérdések

Dolgozatomban egy többszereplős modellt vizsgálok, amelyben két szereplőtípus van (termelői vagy eladói oldal, valamint fogyasztói oldal). Ezeknek a szereplőtípusoknak a viszonyrendszerét egy előre adott, úgynevezett interakciós hálózati szerkezet határozza meg. A modell részleteit ugyan később fogom bemutatni, mégis az orientáló jellegű, a vizsgálódás irányát kijelölő kutatási kérdéseimet és alkérdéseimet fontosnak már most tartom megfogalmazni (zárójelben pedig azokat a tartalmi egységeket jelzem, amelyekben a kutatási kérdéseket és alkérdéseket megválaszolom):

1. Léteznek-e a modellben (nem klasszikus, aszimmetrikus környezetben) egyértelműen meghatározott egyensúlyi ár- és kibocsátásvektorok?[3] (4. fejezet)

[3] Egyensúlyon a jelenlegi esetben tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyt értek, amely a későbbiekből

a) Ha van egyensúlyi árvektor, az nemnegatív-e? (4.2. alfejezet)

b) Milyen mértékben függ az árvektor a termelők–fogyasztók kapcsolatrendszerének szerkezetétől? (4.3–4.4, 4.6. alfejezetek)

c) Ha létezik egyensúlyi árvektor, a fogyasztói oldal által támasztott kereslet nemnegatív-e? (4.5. alfejezet)

d) Milyen mértékben függnek a termelői kibocsátások a termelők–fogyasztók kapcsolatrendszerének szerkezetétől? (4.5–4.6. alfejezetek)

2. Milyen viszonyban van az árvektor a kibocsátások vektorával? Befolyásolja-e a konkrét piacszerkezet valamilyen szempontból az árak és kibocsátások heterogenitását illetve az eloszlásának kurtózisát? (5.4. alfejezet)

3. Empirikus áreloszlásból realisztikus paraméterek mellett lehetséges-e a mögöttes interakciós hálózati szerkezetre következtetni (tekintettel arra, hogy egy konkrét piac mögötti hálózati szerkezet meghatározása nehézkes)? (5.5. alfejezet)

A fenti felvetésekből látható, hogy az első kérdés (különösen annak a) és c) alkérdései) a modell értelmességére kérdez rá, továbbá lényegét tekintve arra, hogy a modell egy lehetséges dinamizált kiterjesztést követően használható-e komparatív statika szempontjából.[4] Ugyanis, ha például létezne is egyensúlyi árvektor, de az ehhez tartozó fogyasztói keresletek egyike-másika negatív lenne, akkor ez a modell jelentősége, alkalmazhatósága és értelmezése szempontjából alapvető kérdéseket vethetne fel. Hasonló lenne a helyzet akkor is, ha e keresletek mindegyike zérus lenne, vagy a termékárakra teljesülne ugyanez. Következésképpen szükséges megvizsgálni az a) és c) pontban megfogalmazott kérdéseket, mivel a rájuk adott választól nagymértékben függ dolgozatom egésze.

Az első kérdésen belül a további b) és d) alkérdések a modell hátterében jelen lévő struktúra szerepére kérdeznek rá. Másként fogalmazva azt is lehet mondani, hogy ezekben a pontokban feltett kérdések arra irányulnak, hogy van-e a struktúrának szerepe a termékárak, kibocsátások alakulása szempontjából, és ha igen, ez a szerep miként ragadható meg.

A második kérdés egy konkrét piaci szituációt feltételezve, az egyensúlyi árak és kibocsátások heterogenitásával, ezek eloszlásával, sőt eloszlásaival foglalkozik. Mit tapasztalunk akkor, ha szimulációkat futtatunk? Látunk-e olyan jelenségeket, amelyek a valós piaci élettel harmonizálnak?

---

világosan ki is derül.

[4] A B. függelékben található, Banach-féle fixponttételre épülő gondolatmenet kitér az egyensúlyi árvektorral kapcsolatban egy dinamikát is magában foglaló értelmezésre, amely azt mutatja, hogy adott dinamikus környezetben megtörténne az áralkalmazkodás, amely stabilitáshoz vezetne.

Az utóbbi kérdés már átvezet minket a harmadik kutatási kérdésemre. E kérdést illetően arra vagyok kíváncsi, hogy tudunk-e valamilyen következtetést levonni egy empirikus áreloszlásból a mögöttes struktúrára nézve? Ez a kérdés tehát a modell alkalmazhatóságát vizsgálja viszonylag szűkre szabott empirikus keretek között.

1.2. Feldolgozott szakirodalmak, források

A szakirodalom-feldolgozás dolgozatom egyik hangsúlyos részét képezi. Ezért tartom különösen fontosnak, hogy már a bevezetőben szóljak néhány szót azon irodalmak köréről, amelyek a releváns szerkezeti egységben előkerülnek.

Jellemzően szakcikkeket dolgozok fel. Ezek egy része előkelő közgazdasági folyóiratokból származik. Emellett persze a témakör fontos szakkönyvei közül is felhasználásra kerül néhány. Igyekszem olyan szerzőktől idézni, akik témám szempontjából nemcsak fontosak, hanem a terület ismert szakértőinek is tekinthetők.

A szakirodalmak feldolgozásakor különösen fontosnak tartom jelezni a kapcsolódási pontokat a dolgozatomban bemutatott modellhez. Azaz nemcsak egyszerűen kontextusba ágyazom a vizsgált témát, hanem kiemelem azon szakirodalmakat, amelyek a legközelebb esnek ahhoz.

Megjegyzem, hogy a szakirodalmak ismertetésekor nem célom teljességre törekedni, ez lehetetlen vállalkozás is volna. Nem célom továbbá az sem, hogy minden egyes fogalmat bevezessek, pontosan körülhatároljak, ugyanis ezek egy része vagy közismert, vagy megtalálható megfelelő színvonalú közgazdaságtani szakkönyvekben. A legfontosabbakat azonban feltétlenül ismertetem.

Ahol fontosnak gondolom, ott kitérek olyan szakirodalomra is, ami kritikát fogalmaz meg. Ezt sem a teljesség igényével teszem, hiszen nem akarok a szorosan vett tárgytól túlságosan eltérni. Azonban lehetnek mégis olyan megállapítások, amelyek nem hagyhatók figyelmen kívül.

Végül megemlítem, hogy a statisztikai adatok esetében megbízható adatforrást használtam. Olyan adatokat elemzek, amelyek alapos kutatásból származnak, így garantálva látom azok helytálló voltát. Utóbbi lényeges lehet abból a szempontból, hogy hozzájárulhat az empirikus eredmények hitelességének növeléséhez.

1.3. Alkalmazott módszertan

Az alkalmazott módszertan jelentős részét a matematikai közgazdaságtan területén jól ismert matematikai eljárások, tételek adják. Ezek közül a dolgozat szövegében többre csak

utalok, azonban a disszertáció A. függelékében a legfontosabbakat fel is sorolom. A szóban forgó matematikai módszerek, összefüggések, eredmények közül a legfontosabbak a következők:

1. elemi analízis, szélsőérték-számítás;
2. mátrixalgebrai eszközök;
3. Gerschgorin-tételek;
4. Perron–Frobenius-tételek;
5. Banach-féle fixponttétel;
6. variációs egyenlőtlenségek és kapcsolódó eredmények;
7. mátrixok spektrálfelbontásának tétele;
8. valószínűségelméleti eszközök;
9. hálózatelméleti módszertan.

Mindezt kiegészítem még annyival, hogy elemzésemben különösen hangsúlyos szerepet kap a mátrixinvertálás, kiváltképp egy speciális típusú inverzmátrix létezésének vizsgálata illetve elemeinek meghatározása.

Mivel a disszertáció központi modellje hátterében meghúzódó interakciós struktúrára vizsgálata jelentős részét teszi ki a jelenlegi munkának, ezért fontos a kilences pontban említett hálózatelméleti módszertan, amelyet tehát nem mellőzhetek. E tudományterület eszköztárából egyebek mellett a hálózati sűrűséget, valamint egy, a sajátvektor-centralitás fogalmához hasonló koncepciót alkalmazom. Röviden megjegyzem, hogy maga a centralitásvektor egy olyan bevett hálózatelméleti fogalom, amely több, az enyémhez hasonló témát taglaló szakcikkben is említésre kerül (erre a szakirodalmi részben, a megfelelő források tekintetében külön is kitérek).

Sort kerítek még példák ismertetésére, modell-szimulációkra, valamint kalibrációra is. Minden egyes számítást, szimulációt a MATLAB R2019b és R2020b programcsomag segítségével, Ubuntu 18.04.3 LST és Windows 10 Pro (64 bit) környezetben futtattam. A kódok, algoritmusok legfőbb jellegzetességeit a releváns fejezeten belül részleteiben is ismertetem. Ezenkívül az empirikus részeknél külön figyelmet szentelek a felhasznált adatbázis rövid leírására.

1.4. A dolgozat felépítése, szerkezete

Dolgozatom alapvetően öt fő szerkezeti egységet foglal magában, amelyek elnevezésükben ugyan nem feltétlenül fedik a megfelelő fejezetcímeket, tartalmunkban viszont igen:

1. bevezetés;
2. szakirodalmi beágyazás (kettő fejezet);
3. központi elméleti rész (modell bemutatása, felépítése stb.);
4. alternatív modellek vizsgálata, szimulációk és empirikus elemzés (kalibráció);
5. összegzés és konklúzió.

Ezen szerkezeti egységek rajzolják ki azt a gondolati ívet, amelyet bejárva bemutatom kutatásomat és eredményeimet. Ezért már itt, a bevezető szakaszban fontosnak tarom felvázolni azt az utat, amelyet munkám során követek. Teszem ezt most még anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznék, mindössze egy vázat írok most fel, amelyet a továbbiakban töltök meg tartalommal.

A szakirodalom feldolgozása, a beágyazás nagyon fontos része munkámnak. Az érintett fejezetek több alegységre bomlanak, egy általánosabb bevezetés irányából közelítve olyan specifikusabb részterületekig, amelyek kutatásom legszorosabban vett kontextusát jelentik. Ezért azon szakirodalmaknál, amelyek közvetlenül kapcsolódnak vizsgálódásomhoz, hosszasabban elidőzök, illetve részéletesebben elemzem azokat.

A modell bemutatását, felépítését is több alegységen keresztül tárgyalom. Törekszem a levezetések részletezésére, különösen azokon a pontokon, amelyek kritikusak munkám szempontjából. Amennyiben egy adott állítást illetően több bizonyítást közlök, az mindig a módszertani sokszínűség és e sokszínűség közgazdasági vetületeinek szemléltetése érdekében történik. Nem utolsósorban utóbbi fogódzópontokat jelenthet hasonló problémák elemzésénél, ezzel segítséget adva egyes közgazdasági modellek vizsgálatához.

Az ezt követő alternatív modellvizsgálat révén betekintést kaphat az olvasó az előzőekben bemutatott elméleti modell lehetséges módosításaiba. Erre és a korábbiakra építve, az illusztráció és empíria pedig azt hivatott elősegíteni, hogy a teoretikus konstrukciók egyes tulajdonságai kézzelfoghatóbb, plasztikusabb módon jelenjenek meg. Ezenkívül e példákon, elemzéseken keresztül rámutatok kutatásom néhány fő mondanivalójára is. Vagyis, ahogy fentebb jeleztem, arra törekszem, hogy az elméleti oldalt a gyakorlati oldalhoz közelítsem.

Végül az összegzés és konklúzió fogja egységbe dolgozatom leglényegesebb megállapításait, illetve tanulságot is megfogalmaz. Ezen a ponton számba veszem a korábban felírt kutatási kérdéseket, azokra részletes válaszokat adok. Ily módon az összegző jellegű következtetések is egy jól strukturált, könnyen nyomon követhető rendet mutatnak.

2. Egyensúlyról és piacszerkezetekről általában

Ahhoz, hogy a dolgozatomban megjelenő oligo- vagy monopolisztikus megközelítést, azaz kutatásom alapvető piacszerkezeti, játékelméleti vonatkozásait megfelelő módon kontextusba helyezzem, az adekvát elméleti alapot és beágyazottságot biztosítsam, elkerülhetetlen, hogy alapvető közgazdaságtani fogalmakról, modellekről szót ne ejtsek. Ennek során négy főbb területet fogok érinteni. Ezek a következők:

1. általános egyensúlyelmélet;
2. további egyensúlyfogalmak;
3. jelentősebb piacszerkezeti modellek;
4. piacszerkezetek és heterogenitás módszertani megragadása.

Az általános egyensúlyelméletnek, különösen is az utóbbi legfontosabb jellemzőinek a bemutatásánál alapvetően Zalai (2011) matematikai közgazdaságtani munkájára támaszkodom. Az ezt követő rész olyan további egyensúly-koncepciókat mutat be, amelyek a közgazdasági elemzések elengedhetetlen eszközeivé váltak, mint például a Nash-egyensúly vagy ennek kevert változata. A piacszerkezeti modellek között olyan konstrukciókat veszek számba, amelyek alapkoncepciójuk szempontjából meghatározók (például Cournot- vagy Bertrand-duopólium). A piacszerkezetek és heterogenitás területének tekintetében pedig az ágens-alapú modellek, továbbá a játékelméleti megközelítés világába nyerhetünk némi betekintést.

A szabad verseny lehetőségét feltételező hagyományos besorolás szerint az alábbi piacszerkezeteket szokás megkülönböztetni:

1. tiszta piaci verseny (tökéletesen versenyző piac);
2. monopolisztikus verseny;
3. oligopolisztikus piacszerkezet;
4. duopolisztikus piacszerkezet;
5. monopólium.

Megjegyzem, hogy ebben a felosztásban az oligo- és monopolisztikus piaci struktúra tökéletlen versenyt jelent, hiszen e piaci viszonyok között az eladói oldal nem árelfogadó,

ugyanakkor – legalább egy – versenytársa is van (Kreps 1990). Ez alapján, amint azt alább látni fogjuk, a tiszta piaci verseny és a monopólium nem tökéletlenül versenyző piac.

A tiszta piaci verseny modellje a közgazdaságtan elmélettörténete során nagy jelentőségre tett szert, különösen annak viszonylagos egyszerűsége, matematikai szempontból jól kezelhetősége miatt. Azonban pont ez jelenti annak gyenge pontját is, ami megalapozott kritikáknak ad teret (lásd Allen és Hellwig 1986b, Lee 1999, Ackerman 2002). E modellel szemben két jelentős ellenvetés hozható fel:

1. a szereplők piaci erejének teljes hiánya (ezért legfeljebb csak a valós viszonyok közelítésére használható);

2. az árképződést nem magyarázza meg. (Allen és Hellwig 1986b)

A fent említett két kritika mellett persze az is meglehetősen idealisztikus és irrealisztikus, hogy a fogyasztók tökéletesen informáltak az árak tekintetében, sőt tranzakciós költségek sincsenek (Kreps 1990). Azonban amint említettem, az egyszerűség különösen lényeges lehet e konstrukciónál. Módszertani szempontból tehát nem helytelen e modellt kiindulási pontként tekinteni egyes vizsgálódásoknál, majd innen kiindulva, feltételek feloldásán keresztül egy realisztikusabb kontextust teremteni.

A monopolisztikus verseny egyik legfontosabb feltevése a monopolisztikus jelleg, ami a termékdifferenciálásban ölt testet. Ennek kapcsán mindenképpen fontos szólni arról, az eladók piaci befolyása nem elhanyagolható, azaz hatással vannak az árak alakulására, míg a fogyasztók abszolút árelfogadó magatartást követnek. A monopolisztikus verseny egyik legfontosabb alapmodellje Dixit és Stiglitz (1977) nevéhez fűződik. Megjegyzem, hogy ez a típusú piacszerkezet az elméleti és alkalmazott közgazdaságtanban továbbra is nagy szerepet játszik (Brakman és Heijdra 2004). Erre az egyik legjobb példa az üzleti reálciklusok (RBC-) és a dinamikus–sztochasztikus általános egyensúlyi (DSGE-) modellek elterjedt alkalmazása. E modellek kapcsán jó bevezetést ad Galí (2008) könyve. Ki kell még emelnem, hogy az ármeghatározás során az eladók határköltség felett áraznak, melynek mértéke a termékek helyettesítési rugalmasságától, azaz a termékek egyediségétől függ. Az említetteken kívül a gazdaság- és piacmodellezés szempontjából a monopolisztikus verseny megkerülhetetlen szerepét jól mutatja még Krugman (1991, 1979), Dixit és Norman (1980), Ethier (1982), Romer (1990) vagy Grossman és Helpman (1991).

Oligopolisztikus piaci versenykörnyezetben a szereplők száma többnyire kisebb mint a monopolisztikus verseny esetében, illetve általában piaci erejük is nagyobb, kevésbé versenyző jellege ellenére azonban monopolisták az oligopólium szereplői is, hiszen ármeghatározók. Az oligopolisztikus helyzet egyik speciális esete a duopólium, amelyet felsorolásomban mégis külön szerepeltettem, annak elméleti jelentősége miatt. Az alábbiakban még részletesebben is ki fogok térni egyes, elmélettörténetileg releváns oligo- és duopo-

lisztukus modell bemutatására. Azonban már itt megjegyzem, hogy a szóban forgó struktúra lehetőséget ad az árképzés megértésére, amelyet az eladók profit-maximalizáló tevékenységéből vezet le, és ezzel mellőzni képes az úgynevezett walras-i árverező koncepcióját (például a Bertrand–Edgeworth-féle modellben) (Allen és Hellwig 1986b). Megjegyzem, hogy az árképzés magyarázata hasonló elven zajlik DSGE-modellekben is.

A monopólium tekinthető a piaci struktúrák tiszta versennyel szembeni másik határhelyzetének, kvázi az utóbbi ellenpontjának. Ez esetben egyetlen szereplő uralja az egész piacot, amely egyben feltételez egyfajta belépési korlátot is. Utóbbinak számtalan oka lehet, például koncesszió, speciális termelési technológia stb.

A piacszerkezeteket illetően nem hagyható figyelmen kívül az informáltság kérdése sem. Megkülönböztetek teljes és tökéletes informáltságot, amelyek lényegét Harsányi (1967) dolgozata alapján mutatom be. Teljes informáltság esetében az egyes szereplők tisztában vannak a többiek stratégiáival, kifizető függvényeivel, azok piacról való informáltságával stb., míg nem teljes informáltságnál ezek valamelyike nem áll fenn. Tökéletesen informált egy szereplő, ha tisztában van a többiek piaci lépéseivel (például árdöntések). Vagyis teljes informáltság esetében ismerjük a piaci döntési szabályokat, mechanizmusokat, míg tökéletes informáltság esetében csak a döntések eredményeit látjuk, amint ezt Harsányi említett cikkében nagyon egyértelműen világossá teszi.

Az elméleti és alkalmazott matematikai közgazdasági modelleknél, ideértve a piacszerkezetek modellezését is, nyíltan vagy burkoltan szükségképpen előkerül a racionalitás kérdése. A közgazdasági elméletalkotás területén Walras és az őt követők számítanak jelentősnek a tekintetben, hogy ők az – egyes alternatívák között optimálisan választó – ideáltipikus gazdálkodó ember fogalmára támaszkodva adták meg a gazdasági egyensúly kialakulásának irányába mutató erőhatások mozgatórugóját (Zalai 2011). Azonban a racionalitásnak ez a szinte máig ható elgondolása közel sem bizonyult egyeduralkodónak (lásd Simon 1955).

2.1. Általános egyensúlyelmélet

Ebben az egységben a mikroökonómiai közelítésű általános egyensúlyelmélet axiomatikus hátterét ismertetem röviden. Ennek megalkotása mindenekelőtt Arrow, Debreu és McKenzie nevéhez fűződik, és lényeges feltevései a következők:[5]

1. a gazdasági szereplők döntési szabályai kizárólag az ártól illetve az árak arányaitól függnek;

[5] Az az általános egyensúlyelmélet axiomatikus megalapozására külön utal is Debreu (1959) munkájának címe.

2. e szereplők árelfogadóként jelennek meg;

3. a javak árai differenciálatlanok. (Zalai 2011)

Ezen eszményi körülményeket pedig csakis egy tiszta piaci versenyre épülő gazdaság vagy egy abszolút módon központosított tervezett gazdasági rendszer teljesítheti, és mindkettő esetben megjelenik egy árverezői funkciót ellátó „metaszint” (első esetben a piaci folyamatok, második esetben egy tervhivatal) (Zalai 2011). Ez szorosan összefügg azzal, amiről korábban szó volt, vagyis hogy szabadon versenyző piaci körülmények között az egyes aktorok piaci ereje irreleváns. Pontosan e piaci erő hiánya teszi szükségessé egy külső árverező létét, ugyanis az árdöntések nem a gazdaság szereplőin múlnak. Ezt oldják majd fel a további piacszerkezetek (monopolisztikus és oligopolisztikus verseny), de ezzel matematikai szinten új egyensúly-koncepciók bevezetését is megkövetelik.

Ez az absztrakt gazdaság matematikai szempontból lényegében egy lista, amelynek elemei például készletértékek, döntési szabályok, termelési lehetőség halmazai, fogyasztási lehetőségek halmazai, és eleget tesz öt feltételnek, amelyet az alábbiakban tételesen fel is sorolok:[6]

1. megengedett árrendszer;

2. optimális termelési tevékenységek;

3. optimális fogyasztási tevékenységek;

4. a gazdaság naturális egyensúlya;

5. a gazdaság eleget tesz a Walras-törvénynek. (Zalai 2011: 37, 188)

A fentiek kapcsán néhány megjegyzéssel élek. Zalai Ernő hivatkozott munkája alapján a naturális egyensúlyra vonatkozó feltétel nem mást fogalmaz meg, mint hogy az általános egyensúly gazdasága nem hiánygazdaság (Kornai János szavaival élve, lásd például Kornai 2010), azaz a készletek és a megtermelt javak összessége fedezi a fogyasztói szükségleteket. Ez a gazdaság reáloldalával szemben támasztott fontos követelmény. A Walras-törvény teljesülése pedig garantálja azt, hogy az egyensúlyi feltételeket megadó egyenletrendszer egyenletei közül legalább az egyiktől eltekinthetünk, hiszen az egyenletrendszer egyenletei egymással összefüggnek (Zalai 2011). Következésképpen, ha egy modellgazdaságban csak áru- és munkapiacot veszünk figyelembe és feltesszük, hogy előbbi megtisztul, akkor ebből az utóbbi egyensúlya már adódik.

[6] Az említett sajátosságokat mélyrehatóan tárgyalja (Zalai 2011) kiváló munkája.

2.2. *További egyensúly-koncepciók*

Az előző gondolatmenet folytatásaként megjegyzem, hogy szükséges másfajta egyensúlyfogalmat is bevezetni. Ennek révén ugyanis az általános egyensúlyelmélet kereteit legfeljebb csak burkoltan feltételezve lehetőség nyílik olyan piaci struktúrák modelljeivel foglalkozni, amelyek szorosabban kapcsolódnak az általam a későbbiekben elemezni kívánt helyzethez. Ennek érdekében azonban fontosnak látok beiktatni egy közbülső lépést, amelynek során alapvető játékelméleti definíciókat ismertetek. A témához jó bevezetőt jelent Fudenberg és Tirole (1991) vagy Osborne és Rubinstein (1994) munkája, amelyek közül az utóbbira hagyatkozom. (Amennyiben ettől eltérek, azt külön jelezem.) Vagyis a mostani alfejezet szerves folytatása, egyben pedig lényeges előzménye a következő részeknek, hiszen azok megértését támogatja, így ezt a szigorúan közgazdasági tartalmú egységektől nem érdemes elkülöníteni.

Ezeknek a definícióknak a bemutatásával az eddigi teoretikust bázist kívánom bővíteni. Fontosnak tartom hangsúlyozni, hogy ezek közül az első fogalom konkrétan is előkerül a saját elemzésem tekintetében. A második definíció az elsőnek egy kézenfekvő általánosítása, amely inkább azt a célt szolgálja, hogy újabb távlatokat nyisson, és továbbgondolásra serkentsen.

2.2.1. Stratégiai játék és Nash-egyensúly

2.1. Definíció (Osborne és Rubinstein 1994 alapján)**.** Egy stratégiai játékot az alábbiak határozzák meg:

1. szereplők egy $\mathcal{N} \neq \emptyset$ halmaza;
2. tetszőleges $i \in \mathcal{N}$ szereplőhöz a döntési alternatívák egy A_i halmaza;
3. minden $i \in \mathcal{N}$ szereplő rendelkezik egy $\succeq_i$ preferencia-relációval az $\times_{k\in\mathcal{N}} A_k$ halmazon.

Bizonyos – a dolgozat szempontjából nem annyira lényeges – feltevések mellett minden $i \in \mathcal{N}$ esetén a $\succeq_i$ preferencia-relációhoz található egy olyan $u_i : \times_{k\in\mathcal{N}} A_k \to \mathbb{R}$ függvény, hogy tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \times_{k\in\mathcal{N}} A_k$ tekintetében teljesül a következő:

$$\mathbf{a} \succeq_i \mathbf{a}' \Leftrightarrow u_i(\mathbf{a}) \geq u_i(\mathbf{a}')$$

Ekkor a stratégiai játékot röviden az $\langle \mathcal{N}, (A_i), (u_i) \rangle$ absztrakt forma adja meg.

Ezek után már definiálható a Nash-egyensúly, ami lényegében úgy interpretálható, hogy egy szereplőnek sem érdeke változtatni egy adott döntésén, amennyiben a többi szereplő

nem változtat a sajátján, ugyanis egyoldalú változtatás mellett biztosan nem jár jobban. Ez formalizálva a következőképpen adható meg:

2.2. Definíció (Nash 1951, 1950, Osborne és Rubinstein 1994 alapján)**.** Egy $\langle \mathcal{N}, (A_i), (u_i) \rangle$ stratégiai játéknál $\mathbf{a}^* \in \times_{k \in \mathcal{N}} A_k$ Nash-egyensúlyi pont (vagy tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly), ha tetszőleges $i \in \mathcal{N}$-re igaz, hogy

$$u_i(\mathbf{a}^*) \geq u_i(a_i, \mathbf{a}^*_{-i}),$$

ahol $a_i \in A_i$ és $\mathbf{a}^*_{-i} \in \times_{\substack{k \in \mathcal{N} \\ k \neq i}} A_k$.

Ennek kapcsán meg kell említeni a legjobb választ is, amely szintén egy kulcsfogalom Nash-egyensúly tekintetében. Egy U_i^{BR} függvényt adott $i \in \mathcal{N}$ esetén legjobb válasznak hívunk, ha

$$U_i^{BR}(\mathbf{a}_{-i}) = \left\{ a_i \in A_i \,\middle|\, u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}) \geq u_i(a_i^{'}, \mathbf{a}_{-i}), a_i, a_i^{'} \in A_i, \mathbf{a}_{-i} \in \times_{\substack{k \in \mathcal{N} \\ k \neq i}} A_k \right\}$$

Világosan látható, hogy az U_i^{BR} függvény adott $\mathbf{a}_{-i}$ vektorhoz az A_i egy részhalmazát rendeli hozzá, azaz

$$U_i^{BR} : \times_{\substack{k \in \mathcal{N} \\ k \neq j}} A_k \to 2^{A_i}$$

A modellek egy részében azonban U_i^{BR} egyértékű, és amint látni fogjuk a disszertáció modellje esetében is ez a helyzet. Ha a Nash-egyensúly definíciójában szereplő jelöléseket vesszük, akkor a legjobb válasz iménti fogalmát alkalmazva, egy adott $i \in \mathcal{N}$-re $a_i^* \in A_i$ Nash-egyensúly, ha

$$a_i^* \in U_i^{BR}(\mathbf{a}^*_{-i})$$

Ha a legjobb válasz egyértékű, akkor a fenti tartalmazás helyett egyszerűen az $a_i^* = U_i^{BR}(\mathbf{a}^*_{-i})$ alakot használjuk.

2.2.2. Stratégiai játékok kevert kiterjesztése és kevert Nash-egyensúly

A korábbi jelöléseket megtartva bevezetünk egy új szimbólumot. Legyen $\Delta(A_i)$ az A_i-n értelmezett valószínűségek vagy valószínűség-eloszlások halmaza. Ha például A_i egy véges elemű halmaz, akkor

$$\Delta(A_i) = \left\{ P \,\middle|\, P : A_i \to [0, 1], \sum_{a_i \in A_i} P(a_i) = 1 \right\}$$

Ezután definiálhatjuk a hagyományos stratégiai játék kevert kiterjesztését:

2.3. Definíció (Osborne és Rubinstein 1994 alapján)**.** Az $\langle \mathcal{N}, (\Delta(A_i)), (\widehat{u_i})\rangle$ absztrakt formát a $\langle \mathcal{N}, (A_i), (u_i)\rangle$ stratégiai játék kevert kiterjesztésének hívjuk, ha tetszőleges $i \in \mathcal{N}$-re

$$\widehat{u_i} : \times_{k\in\mathcal{N}}\Delta(A_k) \to \mathbb{R},\ \widehat{u_i}(\widehat{\mathbf{a}}) = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbf{a}}}(u_i(\mathbf{a})),$$

ahol $\mathbf{a} \in \times_{k\in\mathcal{N}}A_k$, $\widehat{\mathbf{a}} \in \times_{k\in\mathcal{N}}\Delta(A_k)$ és $\mathbb{E}_{\widehat{\mathbf{a}}}$ a valószínűségeloszlások $\widehat{\mathbf{a}}$ vektorához rendelt várható érték. (Ha minden A_i véges, akkor a szóban forgó várható érték nem más, mint az egyes $u_i(\mathbf{a})$-k megfelelő valószínűségekkel súlyozott összege.)

A kevert kiterjesztés segítségével pedig meghatározható a kevert egyensúly is:

2.4. Definíció (Osborne és Rubinstein 1994 alapján)**.** Egy stratégiai játék kevert egyensúlya az adott stratégiai játék kevert kiterjesztésének Nash-egyensúlya.

A Nash-egyensúly említett fogalmait illetően a teljesebb összkép érdekében említést érdemel Dasgupta és Maskin (1986a,b) kétrészes tanulmánya. Ezek a cikkek egy speciális függvényosztályra, a nem folytonos függvények osztályára vonatkozóan vizsgálódnak a Nash-egyensúly tekintetében. A tanulmány második részében a gyakorlati alkalmazhatóság kerül a figyelem középpontjába, és itt a szerzők rámutatnak a közgazdasági alkalmazhatóságra (bár e függvényosztállyal viszonylag keveset találkozunk).

Megjegyzem, hogy léteznek még további fontos egyensúly fogalmak is, mint például a korrelált-típusú egyensúly. Azonban ezeket nem részletezem, mert túlmutatnak dolgozatom keretein. Esetemben a tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlynak lesz jelentősége, így a továbbiakban ennek koncepcióját tartom szem előtt. A disszertáció központi modelljének megfelelő részét leszámítva, ahol jelentősnek érezem, hangsúlyozom a szóban forgó egyensúly meglétét.

2.3. Fontosabb gazdaság- és piacszerkezeti modellek

Ebben az alfejezetben az általam legfontosabbnak vélt gazdaság- és piacszerkezeti modelleket tárgyalom. A relevanciát egyrészt a modellek elmélettörténeti és közgazdaságtani jelentősége határozza meg, másrészt az, hogy hozzátartoznak ahhoz a szélesebb kontextushoz, amelyben saját kutatásomat is elhelyezem, hiszen egyik-másik típus a benne megjelenő koncepció révén előzményét is jelenti disszertációm modelljének. Gondolok itt konkrétan is a mono- vagy oligopolisztikus szituációkat vizsgáló elméleti konstrukciókra. Különösen is figyelemre méltó a Bertrand-típusú megközelítés, hiszen a piacszerkezeti modellek közül ez bír a legnagyobb jelentőséggel a későbbi elemzésem során. Megjegyzem azt is, hogy mivel a többszereplős piacszerkezetek egy speciális esetét fogom a szakirodalmi részt követően vizsgálni, ami újfent indokolja röviden a megítélésem szerint

lényeges többszereplős modelleket rövid ismertetését. Harmadrészt ezek szorosan kapcsolódnak a szakirodalmi áttekintés következő fejezetéhez is, mintegy megalapozzák azt.

A jelenlegi alfejezetet további alegységekre bontom, és az alábbi tématerületeket érintem:

1. a Dixit–Stiglitz-modell részleges bemutatása;

2. Input-output modellek formalizált szerkezete, és ezen belül a Leontief-inverz szerepe;

3. a Cournot-féle modell vizsgálata (kiegészítve az aggregált játékokkal);

4. a Stackelberg-féle piacszerkezeti modell felépítése;

5. a Bertrand- és Bertrand–Edgeworth-féle modell konstrukciója, annak viszonya a korábbi modellekhez.

Az alábbiakban formalizált módon is ismertetek egy-egy konkrét modellfajtát. Ez véleményem szerint a pontosabb fogalomalkotást, valamint az alaposabb megértést segíti. Ezenkívül a bemutatott modell kidomboríthat olyan jellegzetességeket, sajátosságokat, amelyeket a szöveges megfogalmazás esetleg elfed. Végül, de nem utolsósorban megjegyzem, hogy fentebb említettek értelmében az alábbiakban nem vállalkozom – és nem is vállalkozhatom – terjedelmes, minden részletre kiterjedő bemutatásra, emiatt csak a legszükségesebbekre szorítkozom.

2.3.1. Dixit–Stiglitz-modell

A címben szereplő modellt Dixit és Stiglitz (1977) munkája alapján mutatom be részlegesen és vázlatosan, szinte kizárólag a CES-típusú hasznossági függvényt felhasználó modellváltozatnak a keresleti függvényt taglaló részletére koncentrálva. Nem tehetem ugyanis meg, hogy a monopolisztikus verseny talán legismertebb modelljét a szakirodalmi részben teljesen mellőzöm. Kétség sem férhet hozzá ugyanis, hogy a Dixit–Stiglitz-modell a közgazdaságtan egyik legjobban ismert és alkalmazott elméleti keretrendszere.

Mielőtt azonban továbbmennék és a részletekbe jobban belebocsátkoznék, egy alapvető jelöléstechnikai kitérőt teszek. Ennek kapcsán megjegyzem, hogy a modellben szerepel egy kitüntetett x_0 aggregált ármércejószág, továbbá $n > 0$ termék, amelyek mennyiségét $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelöli. Következésképpen a többszereplős reálkontextusban definiálva van egy olyan viszonyítási alap, amely az árak meghatározása szempontjából elengedhetetlen.

Ezt követően, Dixit és Stiglitz (1977) nyomán, bevezethető az alábbi hasznossági függvényt mint célfüggvény:

$$u = U\left(x_0, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right), \tag{2.1}$$

ahol $\rho > 0$, továbbá $\rho < 1$ a konkavitást hivatott biztosítani. A szerzők feltételezik még, hogy a hasznossági függvény minden változójában homotetikus. E ponton megjegyzem, hogy az ebben a képletben szereplő ρ érték nem tévesztendő össze ama szimbólummal, amelyet a dolgozat későbbi részében szintén ezzel a görög betűvel jelölök.

Ezután kerül sor a célfüggvény optimumának meghatározására az

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I \tag{2.2}$$

költségvetési korlát mellett, ahol p_i a megtermelt javak árát, valamint I a jövedelem.

Dixit és Stiglitz (1977) belátja, hogy tetszőleges i-re x_i optimális értéke az alábbi képlettel írható fel:

$$x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{-\frac{\rho}{1-\rho}}\right)^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{p_i}\right]^{\frac{1}{1-\rho}} \tag{2.3}$$

Ebből pedig egyszerűen kihozzák minden $i \neq j$ esetén az

$$\frac{x_i}{x_j} = \left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \tag{2.4}$$

egyenletet, ahol az $1/(1-\rho)$ hányados a helyettesítés rugalmasságát jelenti.

Mindebből látható, hogy a szerzők kapcsolatot létesítenek az optimális keresett mennyiségek és árak között. A modell bemutatását azonban ezen a ponton abbahagyom. Megjegyzem azonban, hogy a szerzők egyebek mellett meghatározzák a vállalati profitmaximalizálás révén adódó közös egyensúlyi árat, amely nem más mint a közös határköltségnek és ρ-nak a hányadosa, valamint az egyensúlyi mennyiséget is, amely pedig a fixköltségnek és a közös határköltségnek a hányadosával egyenes arányos.

2.3.2. Input-output modellek

Az input-output modellkeretet azért tárgyalom, mert ez adja az alapot a Leontief-inverz képzéséhez, amely viszont jó néhány, a kutatásomhoz több szempontból közel álló szakirodalomban központi helyet foglal el, hiszen lehetőséget ad a hálózati megközelítés bevezetésére. E szakirodalmakra példa Acemoglu et al. (2012) cikke vagy Acemoglu et al. (2016) tanulmánya, amelyek azonban kevésbé a piacszerkezetekre, hanem sokkal inkább

a gazdaság szerkezetére fókuszálnak. Mégis az említett szerzők munkái kiválóan bemutatják, hogy az input-output modellkeret miként ad lehetőséget a gazdasági hálózatok szerkezeti aspektusainak a vizsgálatára, hiszen ahogy azt náluk láthatjuk, a Leontief-inverz megfelelő általánosítása lehetővé teszi a hálózati pozíció és a gazdasági teljesítmény kapcsolatának az elemzését. Következésképpen e szerzők az input-output modellkeretet alkalmazzák oly módon, hogy a Leontief-inverz segítségével a mögöttes hálózati szerkezet megközelíthetővé váljon. Szintén a szóban forgó szerzőkre támaszkodva kimondható, hogy az általánosított Leontief-inverz képes megragadni a hálózati hatás egyéb arculatát (például szektorok közötti sokkterjedés), sőt egy alkalmas mutató alapján származtatott hatványsoros felírás vizsgálhatóvá teszi a közvetlen és közvetett hálózati hatásokat is.[7] A disszertáció modelljében ez a fogalom explicit módon ugyan nem jelenik meg, de a közvetlen és közvetett hálózati hatások fontos részét képezik annak. Vagyis a szakirodalommal való kapcsolat legfeljebb csak áttételesen, az inverzképzés és -értelmezés problémáját illetően mutatható ki.

A modell ismertetéséhez bevezetjük az $\mathbf{R} = (r_{ij})$ valós értékű kvadratikus mátrixot, amelyben a mátrix elemei a termelés során felhasznált egyes termelési tényezők fajlagos ráfordításait jelölik (Zalai 2011). Az input–output modellek Leontief nevéhez fűződnek – s a termelők közötti kapcsolatrendszer hatásvizsgálatára alkalmasak –, aki a termékeket tekinti modelljében termelési tényezőknek, és ha $\mathbf{x} \geq 0$ jelöli a kezdeti bruttó kibocsátást, $\mathbf{v} \geq 0$ pedig a végső nettó kibocsátást, akkor (Zalai 2011):

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{x}$$

Innen egyszerű algebrai átalakítások után

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{I}$ jelöli az egységmátrixot, $(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}$ pedig a már említett Leontief-inverzet. Világosan látható, hogy az utóbbi alak kizárólag akkor írható fel, ha a Leontief-inverz létezik és nemnegatív.

Az invertálás kérdése, sőt egyáltalán az inverz létezésének megállapítása számtalan esetben nehézséget jelent. Ennek orvosolására több algebrai módszer is kínálkozik. Egy ígéretes módszer lehet a mátrix sajátértékeinek vizsgálata. Közismert tétel ugyanis, hogy egy $\mathbf{M} = (m_{ij})$ kvadratikus mátrix pontosan akkor invertálható (reguláris), ha nincs zérus sajátértéke. A sajátértékek becslésére egy alkalmas eredményt Gerschgorin (1931) tétele fogalmaz meg, amely szerint $\mathbf{M}$ sajátértékei az m_{ii} középpontú $\sum_{j\neq i} |m_{ij}|$ sugarú körön (a

[7] Az általánosított Leontief-inverz hatványsoros felírásával, annak közvetlen és közvetett hálózati hatásokra vonatkozó értelmezésével kapcsolatosan lásd Acemoglu et al. (2016) részletes elemzését.

valós számegyenesen a szóban forgó tulajdonságú nyílt intervallumon) belül helyezkednek el. Ez formalizálva azt jelenti, hogy

$$|m_{ii} - s_i| \leq \sum_{j \neq i} |m_{ij}|,$$

ahol s_i a megfelelő sajátértéket jelöli.

Világos, hogy amennyiben $s_i = 0$, akkor

$$|m_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$$

Ezt a megállapítást megfordítva, ha

$$|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|,$$

akkor $s_i \neq 0$. Az utóbbi szigorú egyenlőtlenséget szigorú diagonális dominanciának hívjuk, és a disszertáció modelljének analízise során jómagam is használom ezt a tulajdonságot. Utóbbi elégséges feltétele az említett mátrix regularitásának.

2.3.3. Cournot-féle modell

A Cournot-féle duo- vagy oligopolisztikus modell legfontosabb jellegzetessége, hogy döntési változója a kibocsátás (Tasnádi 2001; Tirole 1988). Következésképpen az egyik legfőbb kifogás vele szemben az lehet, hogy nem magyarázza az árképződés mechanizmusát, hanem egy külső árverező feltételezésére épít (Tasnádi 2001). Most lássunk egy meglehetősen egyszerű példát Cournot-típusú piacszerkezetre Tirole (1988) munkája nyomán, bár lesz, ahol eltérek tőle. Mielőtt azonban ebbe belefognék, módszertani szempontból külön is felhívom a figyelmet az ebben az alfejezetben használt vektoros és mátrixos felírás jelentőségére, hiszen a dolgozatom modelljeiben a mátrixalgebra kiemelt relevanciával bír.

Legyen jelen n termelő a piacon. Írja le $p(y) = 1 - y$ összefüggés a piaci áralakulást, ahol $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ az egyes termelők kibocsátásainak összege, ezen belül y_i jelöli az i-edik termelő nemnegatív kibocsátását. Legyen továbbá $c(y_i) = ky_i$ lineáris függvény a termelés összköltsége. Ha a

$$\pi_i(\mathbf{y}) = p(y)y_i - c(y_i) \tag{2.5}$$

az i-edik termelő nyereségfüggvénye, akkor meg szeretnénk oldani a

$$\max_{y_i \geq 0} \pi_i(\mathbf{y}) \tag{2.6}$$

feladatot, ahol $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\mathsf{T}$. Utóbbi feladatban szereplő függvény az i-edik termelő legjobb válasza.

Mivel $\pi_i(\mathbf{y})$ az y_i változóját tekintve egy másodfokú kifejezés, valamint a másodfokú tag főegyütthatója negatív, ezért biztosan létezik a feladatnak globális maximuma. Ennek ki kell elégítenie a következő elsőrendű feltételt:

$$\frac{d\pi_i(\mathbf{y})}{dy_i} = -y_i + p(y) - k = 0 \tag{2.7}$$

Következésképpen azt kapjuk, hogy

$$y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 - k \tag{2.8}$$

Mátrixalakban felírva egy egyszerű alakot kapunk:

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n)\mathbf{y} = (1 - k)\mathbf{1}_n, \tag{2.9}$$

ahol $\mathbf{I}_n$ az $n \times n$-es egységmátrix, $\mathbf{J}_n$ pedig az $n \times n$-es, csupa egyesből álló mátrix, illetve $\mathbf{1}_n$ olyan $n \times 1$-es oszlopvektor, amelynek minden koordinátája egy. Feladatunk $\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n$ inverzének meghatározása. Ehhez egy nagyon hasznos tételt, az úgynevezett Sherman–Morrison-formulát használjuk (lásd Sherman és Morrison 1950 vagy annak általánosítását Harville 1997).

2.1. Tétel (Sherman–Morrison)**.** *Legyen* $\mathbf{M}$ *egy* $n \times n$*-es valós mátrix,* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *pedig* $n \times 1$*-es valós koordinátájú oszlopvektorok. Az* $\mathbf{M} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ *mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha* $1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$*, ekkor a keresett inverz:*

$$(\mathbf{M} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T})^{-1} = \mathbf{M}^{-1} - \frac{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{M}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}} \tag{2.10}$$

Estünkben $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{1}_n$. Alkalmazva a formulát,

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\mathsf{T})^{-1} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n+1}\mathbf{J}_n \tag{2.11}$$

Ez alapján $\mathbf{y}$-t meghatározhatjuk (2.9) alapján,

$$\mathbf{y} = (1 - k)\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{n+1}\mathbf{J}_n\right)\mathbf{1}_n \tag{2.12}$$

Azaz y_i nem más, mint

$$y_i = \frac{1 - k}{n + 1} \tag{2.13}$$

Tehát a piac összes termelőjének kibocsátása megegyezik, amely pontosan akkor nemne-

gatív, ha $k \leq 1$. Tehát ebben a modellben az átlagköltség – és a termelők száma – befolyásolja a kibocsátás nagyságát. Méghozzá minél nagyobb az átlagköltség annál kisebb a kibocsátás, vagyis a termelők visszafogják termelésüket. Megjegyzem, hogy hasonló eredmény előkerül disszertációm modelljének egy speciális eseteként teljes interakciós hálózati szerkezet mellett, annyi különbséggel, hogy nálam mennyiségi döntés helyett árdöntés szerepel (így nyilvánvalóan nincs árverező sem), vagyis a feltevések szintjén nincs egyenértékűség.

Ez alapján a megállapított termékár pedig

$$p(y) = \frac{nk + 1}{n + 1} \tag{2.14}$$

Látjuk, hogy az átlagköltség meghatározza az árképződést is. Azaz a növekvő átlagköltség növeli a termékárat is, hiszen egységnyi előállítása drágább.

Mivel $k \leq 1$, ezért $p(y) \leq 1$. A j-edik termelői nyereség:

$$\pi_i(\mathbf{y}) = \frac{(k-1)^2}{(n+1)^2} \tag{2.15}$$

Világos, hogy a nyereség nemnegatív, és pontosan akkor zérus, ha $k = 1$.

A fentebb bemutatott egyszerű Cournot-féle modellnek van tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlya. Ennek az egyensúlyi kibocsátásvektornak minden koordinátája megegyezik, és értéke $(1 - k)/(n + 1)$.

E modell esszenciális jellegzetessége, hogy a szereplők tökéletesen informáltak, mert ismerik a többiek termelési döntéseinek eredményét, amelyet adottságként kezelnek. Utóbbi úgy értelmezhető, hogy a mennyiségi döntéseket illetően a termelők feltételezik, hogy saját döntésük nincs hatással a többiekére. Ezen információ amennyiben biztos tudáson alapul, az egyes szereplőket teljesen informáltnak tekinthetjük, ellenben, ha nem, akkor a teljes informáltság sem áll fenn. Felhívom a figyelmet arra, hogy ha nagyszámú termelő van jelen a piacon, akkor az egyes szereplők relatív súlya olyan kicsi, hogy árdöntéseik alig gyakorolnak hatást a többi szereplő ármeghatározására, és ezt az elenyésző hatást modellezési szempontból zérusnak vehetjük. Utóbbi eset jellemzően DSGE-modellek felépítésénél kerül elő. A témában további, Cournot-típusú modellt vizsgáló alapvető munkák például Ruffin (1971), Gabszewicz és Vial (1972), Roberts és Sonnenschein (1976), Maskin és Tirole (1987) vagy Saloner (1987) nevéhez fűződnek. Az újabb szakirodalmak közül feltétlenül figyelmet érdemel Bimpikis et al. (2019) cikke annak hálózatos megközelítése miatt. Az általuk bemutatott modell homogén terméket értékesítő piaci szereplők versenyét mutatja be egy hálózati keretben. A hálózati szerkezet egy páros gráffal reprezentálható, ahol az egyik halmazban az eladók, míg a másikban azon lehetséges piacok vannak, amelyeken e szereplők értékesíthetik termékeiket. A megközelítés nem utolsó-

sorban játékelméleti, és célja, hogy kapcsolatot teremtsen az egyensúlyi kibocsátás és az ellátási útvonal között. A cikk vizsgálja annak nyereségbeli és fogyasztóoldali hatását, amikor a versenyszerkezetben változás áll be, például, ha egy vállalat új piacot hódít meg. A szerzők munkájában megjelenik továbbá a hálózati pozíció is, amely koncepciójában hasonlít a disszertációmban központi szerepet betöltő centralitás-mutatóhoz. Egy másik, a szóban forgó szerzők által is hivatkozott frissebb tanulmány Abolhassani et al. (2014) (szintén) eladók és piacok hálózatára épülő modellje, amely elsősorban az (egyértelmű) egyensúly meghatározására törekszik adott hálózati szerkezet, valamint eltérő költség- és termékárfüggvények mellett. Megjegyzem, hogy további játék- és hálózatelméleti szakirodalmak részletesebb ismertetésére a következő fejezetben kerül majd sor.

Aggregált játékok

E mostani egységben a már bevezetett jelölésekre támaszkodom. Az alábbiakban az úgynevezett kvázi-aggregált játékokat definiálom Jensen (2010) cikkek nyomán,[8] amely definíció alkalmazását tekintve az ebben a fejezetben tárgyalandó gazdaság- és piacszerkezeti modellek közül a mostani alfejezet Cournot-féle modelljéhez lényegileg is kapcsolódik, amelyre hamarosan konkrétan rámutatok.

2.5. Definíció (Jensen 2010 alapján)**.** Legyen $\mathcal{N}$ a játékosok halmaza, A_i pedig az i-edik szereplő döntési alternatíváinak halmaza adott $i \in \mathcal{N}$-re. Jelölje $\sigma_i : \times_{k \neq i \in \mathcal{N}} A_k \to \mathbb{R}$ az úgynevezett interakciós függvényt minden $i \in \mathcal{N}$ esetén. Ekkor

$$\pi_i(\mathbf{a}) = \widehat{\sigma}_i(a_i, \sigma_i(\mathbf{a}_{-i})) \tag{2.16}$$

kifizető- vagy nyereségfüggvénnyel definiált játékot kvázi-aggregált játéknak hívjuk, ahol $\mathbf{a} \in \times_{k \in \mathcal{N}} A_k$ és $\mathbf{a}_{-i} \in \times_{k \neq i \in \mathcal{N}} A_k$.

Közgazdasági modellekben a fent bevezetett interakciós függvényt akkor érdemes használni, ha a megfogalmazott játékban szerepe van az aggregátumoknak. Ugyanis a σ_i függvény lényegét tekintve nem csinál mást, mint a versenytársak stratégiai változóit aggregálja valamilyen módon. Egy tipikus példa a szóban forgó játékokra a Cournot-féle modell. Dolgozatomban bemutatott konkrét modellt és az ehhez kapcsolódó jelölésrendszert figyelembe véve: $\mathbf{a} = \mathbf{y}$, $a_i = y_i$, $\mathbf{a}_{-i} = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)^\mathsf{T}$, $\sigma_i(\mathbf{a}_{-i}) = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} y_k$, valamint

$$\widehat{\sigma}_i(a_i, \sigma_i(\mathbf{a}_{-i})) = \left(1 - y_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} y_k\right) y_i - k y_i \tag{2.17}$$

[8] A terminológia szempontjából érdemes megjegyezni, hogy Cornes és Hartley (2012) a kvázi-aggregált játékokat teljesen aggregált játékoknak nevezi.

Érdemes megemlíteni, hogy lehetségesek olyan, az árat döntési változóként tartalmazó modellek, amelyekben az egyes szereplők nem a versenytársaik árait, hanem csak azok aggregátumát veszik figyelembe. Bizonyos tekintetben a disszertációmban tárgyalt modell is ilyen.

2.3.4. Stackelberg-féle modell

A Stackelberg-féle modellt duopolista körülmények között mutatom be. Ez a piaci modell általánosítja a Cournot-féle modellt, hiszen feltételezzük, hogy

1. a piaci szereplők nem egyszerre lépnek;
2. a később lépő piaci aktor stratégiáját befolyásolja az őt megelőző szereplő lépése. (Fudenberg és Tirole 1991)

Vagyis ezen piaci viszonyok közepette információs aszimmetriával kell számolnunk (lásd például Li et al. 2019). Alapvető szakirodalomként figyelembe veendő e téren például Simaan és Cruz (1973a,b) cikke. Érdekes alkalmazás jelenik meg azonban a már említett Li et al. (2019) munkájában. Utóbbi egy keresztértékesítéseket végző két eladóból álló ellátási láncot modellez, amelyben kiemelt szerepe van a keresleti viszonyokra vonatkozó privát információ megszerzésének. Ebben az anyagban tehát bizonyos fokon már érvényesül a struktúra megléte, illetve az információáramlás szofisztikáltabb módon jelenik meg mint a klasszikusnak számító alapmodellekben. A hálózatos alkalmazási lehetőségek szempontjából egy másik megközelítés jelenik meg Başar és Srikant (2002) cikkében. E szerzők egy hálózati játékot vizsgálnak, amelyben egyetlen szolgáltató és számtalan felhasználó van, sőt az egyes felhasználók különböző osztályokba sorolhatók.

Az imént bemutatott Cournot-féle modellt vesszük alapul (a jelölések, a használt függvények és az eredmények tekintetében). Tehát $p(y) = 1-y$, ahol most $y = y_1+y_2$. Azonban a Cournot-féle modelltől eltérően feltételezzük, hogy $y_2 = s_2(y_1)$, ahol s_2 a másodikként lépő termelő stratégiáját leíró függvény (Fudenberg és Tirole 1991). A másodikként lépő szereplő termelési stratégiája ezek szerint az, hogy alapul veszi az elsőként lépő termelői kibocsátást. Az első termelő tehát teljesen informált a második szereplő döntési mechanizmusára nézve, illetve tökéletesen informáltnak is tekinthető, hiszen ugyan utóbbi döntést még nem hozott, de előbbi azt ki tudja számítani. A második szereplő viszont tökéletesen informált az első szereplő döntésének eredménye kapcsán, hiszen ismeri annak kimenetelét, és utóbbi adottságként jelenik meg a számára. Tehát a másodikként lépő végső soron elfogadja az elsőként lépő döntésének eredményeként fellépő kibocsátást. Vagyis a másodikként lépő azt gondolja, hogy döntése nincs hatással az elsőként lépő termelőre, így teljesen informáltnak sem mondható.

Az alábbiakban lényegében (vagyis a felépítést, metodológiát tekintve) Fudenberg és Tirole (1991) nyomdokain haladok, noha számos munkában esik szó e modellről (lásd Osborne és Rubinstein 1994). Az összehasonlíthatóság érdekében két esetet fogok vizsgálni. Elsőként azt elemzem, amikor a szereplők egyszerre lépnek, vagyis az előző modell eredményeit írjuk fel $n = 2$-re. Másodszor az úgynevezett fordított indukció segítségével meghatározom az egyes kibocsátásokat, amelyet Fudenberg és Tirole (1991) szerint már Thomas C. Shelling is használt egy 1960-as munkájában.

Amennyiben $n = 2$, a Cournot-féle modell megfelelő változóinak értékei az alábbiak ($i = 1, 2$):

$$y_i = \frac{1-k}{3}, p(y) = \frac{2k+1}{3}, \pi_i(y_1, y_2) = \frac{(k-1)^2}{9}, \tag{2.18}$$

emlékeztetve arra, hogy k az átlagköltséget jelöli. Ezen eredményeket összehasonlítási alapnak tekintem, és az alábbi eredményekkel fogom összevetni.

A fordított indukció jegyében tekintsük először a második termelő következő döntési feladatát:

$$\max_{y_2 \geq 0} \pi_2(y_1, y_2) \tag{2.19}$$

Ez a másodikként lépő szereplő legjobb válasza. Itt $p(y)$ már lényegében csak y_2 függvénye, mert y_1 adott.

Az elsőrendű feltétel,

$$\frac{d\pi_2(y_1, y_2)}{dy_2} = -2y_2 - y_1 - k + 1 = 0 \tag{2.20}$$

Innen y_2 kifejezhető,

$$y_2 = \frac{1 - y_1 - k}{2} \tag{2.21}$$

A fenti jelölés értelmében $s_2(y_1) = (1 - y_1 - k)/2$. Ezt a döntési szabályt ismeri az először lépő termelő. Mivel pedig ismeri, saját döntése során figyelembe is veszi. Megjegyzem, hogy az iménti eredmény valóban maximum, mivel a nyereségfüggvény második deriváltja negatív.

Az elmondottak alapján felírjuk az elsőként lépő szereplő döntési feladatát,

$$\max_{y_1 \geq 0} \pi_1(y_1, s_2(y_1)), \tag{2.22}$$

s itt $p(y)$ lényegét tekintve csak y_1 függvénye. Ez az elsőként lépő szereplő legjobb válasza, de úgy, hogy az már figyelembe veszi a másodikként lépő aktor válaszlépésének hátterében meghúzódó mechanizmust.

Az elsőrendű feltételt felírva megkapjuk, hogy

$$\frac{d\pi_1(y_1, s_2(y_1))}{dy_1} = -y_1 + \frac{1-k}{2} = 0 \tag{2.23}$$

Innen y_1 kifejezhető, és értéke

$$y_1 = \frac{1-k}{2} \tag{2.24}$$

A (2.21) egyenletbe visszahelyettesítve kijön y_2 is,

$$y_2 = \frac{1-k}{4} \tag{2.25}$$

Tehát a kibocsátások nagyságát befolyásolja az átlagköltség mértéke, amelyről most is fel kell tenni, hogy $k \leq 1$. Az is nyilvánvaló, hogy e kibocsátásszintek eltérőek, y_1 magasabb y_2-nél. Azaz a másodikként lépő szereplő kevesebbet termel az elsőnél. Ezenkívül az is látszik, hogy a Cournot-féle egyensúlyi kibocsátáshoz viszonyítva, annál y_1 nagyobb y_2 pedig kisebb. Tipikusan ez a helyzet jellemző a Stackelberg-féle kibocsátások és a Cournot-féle egyensúlyi értékek vonatkozásában (Fudenberg és Tirole 1991). Az összetermelés könnyen kiszámítható, értéke $3(1-k)/4$, ami a fenti Cournot-féle példa $2(1-k)/3$ értéknél magasabb.

Mindezek után a termékár behelyettesítéssel adódik:

$$p(y) = 1 - \frac{3(1-k)}{4} = \frac{3k+1}{4} \tag{2.26}$$

A termékár szempontjából elsőként megállapítható annak k átlagköltségtől való függése. Másodsorban figyelembe véve a Cournot-féle egyensúlyi árat, utóbbi alacsonyabb a Stackelberg-modellben számítottnál, ha $k > 1$, magasabb, ha $k < 1$, valamint egyenlő azzal, ha $k = 1$. A küszöbérték könnyen kiszámítható az egyes árak egyenlővé tétléből, az egyenlet megoldásaként.

A nyereségekre behelyettesítés után az adódik, hogy

$$\pi_1(y_1, s_2(y_1)) = \frac{(k-1)^2}{8} \tag{2.27a}$$

$$\pi_2(y_1, y_2) = \frac{(k-1)^2}{16} \tag{2.27b}$$

E nyereségek közül az első és a második zérus, ha $k = 1$. Ebből pedig rögtön következik, hogy a nyereség minimuma szintén a $k = 1$ helyen van, és értéke zérus. A nyereség tehát nem kerülhet negatív tartományba. E ponton tehát egyezést láthatunk a Cournot-modellel.

Mivel $k \neq 1$ esetén fennállnak a $(k-1)^2/16 < (k-1)^2/9 < (k-1)^2/8$ relációk, ezért – az említett kikötés mellett – a Stackelberg-modellben az első szereplő nyeresége határo-

zottan nagyobb a Cournot-modell nyereségénél, ellenben a Stackelberg-modell második szereplőjének nyeresége határozottan kisebb a Cournot-modellben megállapított nyereségnél. Ha viszont $k = 1$, akkor ez a feltétel mindkét modell minden egyes szereplője tekintetében zérus nyereséghez vezet.

Megjegyzem, hogy érdekes lenne a Stackelberg-modell egy általánosított, sokváltozós verzióját is megvizsgálni. Egy ilyen vállalkozást megelőzően azonban feltétlenül tisztázni szükséges, hogy mely szereplők lesznek lépéselőnyben a többiekhez képest. Utóbbi viszont meghaladja a dolgozat kereteit, továbbá az itt bemutatott kétszereplős változat már jól illusztrálja bizonyos eltérő piacszerkezetek sajátosságait.

2.3.5. Bertrand- és Bertrand–Edgeworth-féle modell

A Cournot- és – tehetjük hozzá – a Stackelberg-féle modellekhez képest a Bertrand- és Bertrand–Edgeworth-féle modellek nem a mennyiséget, hanem az árat tekintik döntési változónak (Tasnádi 2001). Bertrand- vagy Bertrand–Edgeworth-típusú piacokról illetve árversenyről számos munka született. Ezen szakirodalmak közül például említésre méltó: Levitan és Shubik (1972), Salop és Stiglitz (1977), Dixon (1984, 1987, 1990, 1992), Allen és Hellwig (1986a,b), Dasgupta és Maskin (1986a,b), Maskin (1986), Osborne és Pitchik (1986), Vives (1986), Maskin és Tirole (1988), Reynolds és Wilson (2000), Chowdhury (2003, 2008, 2009). Ezek az alapvető források lehetővé teszik, hogy a szóban forgó modelltípusokat más-más oldalról vegyük szemügyre, amelynek köszönhetően árnyaltabb képet kaphatunk ezekről a piactípusokról. Lényegesek továbbá ezen szakirodalmak abból a szempontból is, hogy elméleti hátteret biztosítsanak a disszertáció hasonló, Bertrand-típusú megközelítésének. Ezen a ponton jegyzem meg, hogy az alábbiakban részletesebben is előjönnek olyan játék- és hálózatelméleti modellek, amelyek tekinthetők Bertrand-jellegűnek. Ebben az alfejezetben azonban a szóban forgó piactípusoknak csak az alapvetése szerepel.

Az alábbiakban – több-kevesebb részletességgel – ismertetek egy olyan alapproblémát, amely egy jól meghatározott modell keretein belül fogalmazódik meg. E probléma a jelenlegi tartalmi egység elrugaszkodási pontjának, fundamentumának is tekinthető. A gondolatmenet annak minden részletében Tirole (1988) munkájára támaszkodik, aki művében felhasználja mind Bertrand 1883-as, mind Edgeworth 1897-es munkáját. Ahol Tirole-tól eltérek, ott ezt külön hivatkozással jelezem.

A Bertrand-modell tekintetében az úgynevezett Bertrand-paradoxont mutatom be részletesen. A piaci struktúra duopolisztikus, azaz két termelő van jelen a piacon, és tökéletesen helyettesíthető termékeket termelnek. Legyen $y > 0$ az egyes termékáraktól függő maximális piaci kereslet, amely a szereplők termékeivel szemben megjelenik. Így a szo-

kásos y_1, y_2-vel jelölve a megfelelő termelői kibocsátásokat, tudjuk, hogy $0 \leq y_1, y_2 \leq y$. Megjegyzem, hogy szintén a korábbiakhoz hasonló módon p_1, p_2 jelöli az egyes termelői árakat. Ezenkívül a következő is teljesül:

$$y_1 = \begin{cases} y, \text{ ha } p_1 < p_2 \\ 0, \text{ ha } p_1 > p_2 \\ \frac{y}{2}, \text{ ha } p_1 = p_2 \end{cases} \tag{2.28}$$

Hasonló szabály szerint alakul y_2 nagysága is, azaz

$$y_2 = \begin{cases} y, \text{ ha } p_1 > p_2 \\ 0, \text{ ha } p_1 < p_2 \\ \frac{y}{2}, \text{ ha } p_1 = p_2 \end{cases} \tag{2.29}$$

A nyereségfüggvény ezek után ($i = 1, 2$),

$$\pi_i(p_1, p_2) = p_i y_i - c(y_i), \tag{2.30}$$

ahol $c(y_i)$ a Cournot-féle modellnél már ismert lineáris összköltségfüggvényt jelöli. A termelők által megoldandó feladat pedig

$$\max_{p_i \geq 0} \pi_i(p_1, p_2), \tag{2.31}$$

ami a jelen példában a legjobb válasz szerepét játssza ($i = 1, 2$). Az egyszerűség kedvéért most csak az adott szereplő által megállapított saját árat tüntettem fel, annak ellenére, hogy ennek változtatása hathat a másik termelő ármeghatározására.

Először vizsgáljuk a $p_1 > p_2 > k$ esetet. Mivel p_1 nagyobb p_2-nél, ezért $y_1 = 0$ és $y_2 = y$ helyezettel szembesülnek a szereplők. Így az első zérus nyereséget, a második pedig $(p_2 - k)y > 0$ nagyságú nyereséget realizál. A p_1 biztosan lehet legjobb válasz, hiszen ha a termelő $p_2 > p_1^{'} > k$ módon csökkenti le p_1 nagyságát, akkor pozitív profitot realizál. Következésképpen érdemes változtatnia. Hasonlóan belátható, hogy $p_2 > p_1 > k$ fennállását vonatkozásában p_2 sem legjobb válasz.

Másodszor nézzük a $p_1 = p_2 > k$ esetet. Ekkor az első szereplő $(p_1 - k)y/2 > 0$, míg a második $(p_2 - k)y/2 > 0$ nyereséget tudhat magáénak. Azonban, ha például az első termelő $p_1^{'} = p_1 - \varepsilon > k$ módon állapít meg új árat ($\varepsilon > 0$), akkor $(p_1^{'} - k)y > 0$ nyereségre tesz szert, ellenben a második termelő nyeresége zérus lesz. Egyszerűen kiszámítható, hogy

$$(p_1 - \varepsilon - k)y > (p_1 - k)\frac{y}{2} \tag{2.32}$$

biztosan teljesül akkor, ha $(p_1 - k)/2 > \varepsilon$. Tehát utóbbi egyenlőtlenség figyelembe vételével az első termelő tud úgy árat módosítani, hogy kedvezőbb helyzetben legyen, mint korábban, ezért a jelenlegi eset sem ad legjobb választ.

Harmadszor $p_1 > p_2 = k$ esetet elemezzük. Világosan látható, hogy az első termelő zérus nyereséggel számolhat, azonban a másik úgyszintén. Érdekében áll-e valamelyikőjüknek árat változtatni? Ha az első termelő a $p_1 > p_1^{'} \geq p_2 = k$ relációt figyelembe véve állapít meg egy $p_1^{'}$ árat, akkor helyzete nem romlik, sőt, ha az eredeti árhoz képest növel, akkor sem. Azonban k alá nem szabad mennie, mert akkor veszteséges lesz. Másrészt, ha nem $p_1 = k$ árat állapít meg, akkor megadja a második szereplőnek az esély, hogy kis áremeléssel már pozitív nyereséget érjen el.

Mindebből adódóan $p_1 = p_2 = k$ lehetőséggel számolhatunk csak legjobb válaszként. Ekkor mindkét termelő nyeresége zérus. Így a termelők egy monopolista nyereségének közelében sem járnak, ez képezi a paradoxont. Sőt a helyzet olyannak tűnik, mintha a piaci szereplők tökéletesen versenyzők lennének.

Tirole (1988) szól arról az esetről is, amikor az átlagköltségek nem egyeznek meg. Ekkor az egyik termelő zérus, míg a másik pozitív nyereségre tesz szert (tehát átlagköltség feletti árat határoz meg). Annak a szereplőnek lesz pozitív a nyeresége, amelyik alacsonyabb átlagköltség mellett termel. Azonban, ha ezen átlagköltségek közelítenek egymáshoz a fentebb részleteiben is tárgyalt állapotot kapjuk.

A Bertrand-paradoxon feloldására Edgeworth tett javaslatot. Ennek módja kapacitáskorlátok bevezetése minden egyes termelő számára. Emiatt azok egy plafonértéknél nagyobb mennyiséget nem értékesíthettek. Tasnádi (2001) nyomán elmondható, hogy a Bertrand–Edgeworth-modell az eredeti Bertrand-modell kiterjesztett változata, amelynek ár illetve mennyiségi dimenziói is vannak, és amelyben a fent bemutatott legjobb válasz lesz az egyensúly.

3. Piacszerkezetek és heterogenitás a modellezésben

Ugyan különféle modellekről fentebb már több szó esett, mégis most újabb aspektusokból közelítek e témához. Ebben a fejezetben a teljesség igénye nélkül utalok néhány olyan általam lényegesnek tartott munkára, amely az árheterogenitás területéhez szorosabban kapcsolódik. Mivel a heterogenitás dolgozatom fókuszában áll, ezért lényegesnek tartom, hogy az ezt vizsgáló fontosabb módszertani megközelítésekre egy külön tartalmi egységben is kitérjek.

Két további alfejezetre osztom ezt a fejezetet. Az egyik az

1. az ágens-alapú modellek világába enged rövid betekintést; a másik
2. egyes játék- és hálózatelméleti nézőpontú modellekre fókuszál.[9]

A fent említett mindegyik megközelítési módnak megvan a maga relevanciája és helye a közgazdasági vizsgálódásokban. A játékelméleti megközelítés arra törekszik, hogy precíz, deduktív módon vonjon le konklúziót a modell szereplőinek viselkedési feltételeiből. Ez a módszer jellemzően az analitikus pontosságot helyezi előtérbe, az általános eredmények megfogalmazását tartja szem előtt, amely időnként komplikáltabb matematikai apparátus használatával jár. Azonban az általánosabb eredmények elérése, jobban mondva az elméleti konstrukció matematikai kezelhetősége érdekében, nem egyszer egyszerűsítő feltevésekkel kénytelen élni. Az ágens-alapú megközelítés kevésbé törekszik deduktív érvényű eredményekre, ellenben lényegesen szofisztikáltabb módon képes megragadni a heterogenitás jelenségét mint a játékelméleti modellek. Tehát mindkét módszertannak megvannak az előnyei illetve hátrányai, alkalmazásuk tekintetében viszont elsősorban a modellező személy felkészültsége, valamint a probléma jellege bírhat döntő jelentőséggel.

Tekintve, hogy munkám elsősorban teoretikus és csak kisebb mértékben empirikus, illetve az abban alkalmazott módszertan egyértelműen a nem-kooperatív játékelmélet területére esik (magában foglalva hálózatelméleti elemeket), így az utóbbi szakirodalmi szintű hangsúlyozása fajsúlyosabb lesz. A játékelméleti megközelítésű modelleket tárgyaló alfejezetben már nemcsak az egyes szakirodalmak általam leglényegesebbnek tartott jellegzetességeit emelem ki, hanem bizonyos szempontok mentén összevetem azokat disszertációm modelljével, és ráirányítom a figyelmet arra a hozzáadott értékre, amellyel a modell az eddigi kutatásokat gazdagíthatja.

[9] A bevezetésben írtakkal összhangban, megjegyzem, hogy ezek a megközelítések – tűnjenek bármennyire valósághűnek – képtelenek megragadni a modellezni kívánt szereplők nem anyagi vonatkozásait.

Megjegyzem, hogy nem kívánok értékítéletbe bocsátkozni a kétfajta megközelítést illetően, erre nem is lenne semmiféle alapom, sőt jogom sem. Azt mindenesetre már most kiemelhetem, hogy mindkét módszertannak megvan a maga létjogosultsága, különösen, ha figyelembe vesszük azt a tapasztalatot, hogy a matematikai módszerek alkalmazhatósága is korlátokba ütközik egy ponton túl (például nagyon összetett problémák tárgyalásakor). Ezekben a szituációkban eredményesebbek, hatékonyabban a szimulációs technikák. Ezzel persze nem azt állítom, hogy utóbbiakat nem szükséges megalapozni, alkalmazhatósági körüket tisztázni.

Úgy gondolom, hogy mindkét módszertani megközelítés alkalmas lehet olyan jelenségek vizsgálatára, amelyeknél az intuíció azt súgja, hogy a piacszerkezetek, az aktorok interakcióinak kiemelt szerepe van. Ilyen például az árheterogenitás jelensége, amely disszertációm nagy részének a fókuszában áll.

Már Salop és Stiglitz (1977) is foglalkozott ezzel az utóbb említett jelenséggel, és megállapították, hogy tökéletlenül informált fogyasztókat feltételezve egy monopolisztikusan versenyző környezetben, az egyensúlyi árak heterogének lesznek. Egész pontosan, a tökéletlenül informált fogyasztók ráfordítás ellenében tökéletes informáltságra tehetnek szert, ez azonban monopolisztikus versenyhez és árheterogenitáshoz vezet. Az információszerzés költségeit tekintve a fogyasztói oldal heterogén, és ez a fajta eltérés azt eredményezi, hogy az eladói oldal szereplői monopolistákként léphetnek fel, amely az áreltérések fontos mozgatója. A tökéletlen informáltság következményeit vizsgálja Rothschild és Stiglitz (1976) a biztosítók piacán, és érdekes eredményekre jutnak versenypiaci környezetben. A szóban forgó szerzők kimutatják, hogy elemzésükben az egyensúly létezése és az egyensúlyi értékek nem függetlenek a feltételezésektől. Cikkükben vizsgálnak olyan esetet, amelyben nem létezik egyensúly. Utóbbi eredmény felhívja a figyelmet arra, hogy monopolisztikus kontextusban megfogalmazott modellek esetében az egyensúly létezése nem magától értetődő, így annak kimutatása értelemszerűen megelőzi az értékek diszeperziójának vizsgálatát. Az előbbiekhez az informáltság/informálatlanság vonalán kapcsolódó érdekes irány Chen és Zhang (2011) cikke, amelyben a bemutatott modell alapvetően értékesítő szereplőket és fogyasztókat tételez fel. A fogyasztókat azonban tovább differenciálja, azok között a modell szempontjából érdemi különbséget tételez fel (informált fogyasztók, informálatlan globális és lokális keresők). Az informált fogyasztók mindig a legolcsóbb termékeket vásárolják meg, míg az informálatlanok árkeresést végeznek. Ezen utóbbi fogyasztói csoportba tartozó, az árakat figyelő, árinformációk után lokálisan kutató fogyasztók szakirodalomban megjelenő interpretációira építve a szerzők a következő két utat követik: ezek a fogyasztók optimalizálnak, de a magas keresési költségek miatt ez mindössze egylépéses; vagy a fogyasztók korlátozottan racionálisak, így az általuk alkalmazott rezervációs ár egyáltalán nem optimalizálás eredménye. A lokális keresőkkel

szemben a globális keresők állandóan újraoptimalizálnak. Ezen a helyen külön is szeretném kiemelni azt a lényeges feltételezést, hogy az árkeresésnek van költségvonzata. A fogyasztókon kívül, ahogy arra fentebb már utaltam, a modellnek van eladói oldala is, ahol legalább két, homogén termékeket előállító szereplő jelenik meg, akik állandó határköltség mellett egymástól függetlenül állítják be áraikat. Az cikk lényegi mondanivalója, hogy egyensúlyi árak szóródásáért az eladók kevert stratégiáján túlmenően az információs különbségek felelősek, míg az egyensúly természetét a lokális keresők rezervációs áraiknak egy benchmarkhoz viszonyított eltérése befolyásolja. Az áreloszlás szempontjából a szerzők arra a megállapításra jutnak, hogy az eloszlás érzékeny lesz a keresési attitűdre, az információszerzés költségeire, valamint a lokális keresők rezervációs árainak már említett benchmarktól mért eltérésére is.

Az elméleti vizsgálódások fontosságát támasztják alá Kaplan és Menzio (2015) empirikus eredményei is, amelyben az árheterogenitást vizsgálva például kimutatták, hogy egyedi termékeknél az áreloszlást leptokurtózis jellemzi, míg termékcsomagok árai a normális eloszlást követnek. Eredményeik azt sejtetik, hogy az árdiszperzitásra a határköltségbeli eltérés nem gyakorol jelentős hatást, ellenben az intertemporális árdiszkriminációval és a keresésből adódó nehézségekkel. Utóbbi szerzőkkel egyetértek abban, hogy az általuk bemutatott eredmények fontos elméleti kutatási irányokat jelölnek ki. Következésképpen ezeknek a kutatási irányoknak kellene meghatároznia a termékárakra vonatkozó elméleti modellezést annak érdekében, hogy azok összhangban legyenek az empirikus eredményekkel. Ezeken a megállapításokon túl más empirikus kutatás azt sejteti, hogy a piacszerkezetnek is kardinális szerepe van az árheterogenitás mértékében, és egy bizonyos részpiacon, iparágban a versenyzők száma minél nagyobb, az árak annál heterogénebbek (azaz a jelenség vélhetően monopolisztikus versenykörülményeket követel meg) (Borenstein és Rose 1994). A piacszerkezet és az árheterogenitás kapcsolatát támasztja alá Clay et al. (2001) tanulmánya is, akik az előző szerzőktől elérő iparágban végeztek kutatásokat. Kimutatták, hogy a verseny fokozódása alacsonyabb árakhoz illetve kisebb árdiszperzióhoz vezet. Ez a vizsgálat arra is rámutatott, hogy azonos versenykörnyezetben szélesebb körű hirdetés szintén árcsökkenést eredményez. Levonható tehát a következtetés, hogy a piacszerkezet figyelembe vétele az árheterogenitást elemző elméleti modelleknél kulcsfontosságú lehet, amelyet az általam bemutatott modellben is hangsúlyozni igyekszem.

A piacszerkezeten kívül lehetnek más tényezők is, amelyek az árak szórását befolyásolják. Ebből a szempontból elgondolkodtató Handbury és Weinstein (2015) cikke, akik az áralakulás térbeli eloszlása szempontjából vizsgálódnak, és kimutatják, hogy az árak területén jelentkező jelentősebb mértékű árheterogenitás az ármérésben tapasztalható módszertani hibákra vezethető vissza. Ezeket a hiányosságokat kiküszöbölve a szerzők rámu-

tatnak annak a következtetésnek a helytelen voltára, miszerint az exportálható termékek árai a városmérettel növekszenek, így eredményük térgazdaságtani konzekvenciával is bír, az új gazdaságföldrajzi modellek alkalmazhatóságát támasztja alá.

Az árazás témakörét tovább árnyalja, ha a stratégiai komplementaritás (vagyis egyes eladók árreakciója más szereplők árváltoztatására) jelenségét is röviden bemutatjuk. Ebből a szempontból Amiti et al. (2019) vagy Koga et al. (2019) munkáját ismertetjük. Az előbbi tanulmány fontos célkitűzése annak megállapítása, hogy a versenytársak árváltoztatása milyen hatással van az áralkalmazkodásra az egyes szereplők szintjén. Az elméleti és empirikus munka rámutat, hogy a kisvállalatok áralkalmazkodását nem befolyásolja a versenytársak árdöntése, ellenben a nagyvállalatok az árak meghatározásakor tekintettel vannak riválisaik árazására. A szerzők e szóban forgó megállapításra alapozva hangsúlyozzák az áralkalmazkodás és a versenytársi környezet tekintetében a szereplők között megjelenő heterogenitást. A másodikként említett munka szintén kiemelt jelentőséget tulajdonít az árdöntések alakulása és a versenytársak árváltoztatása vizsgálatának. A szerzők rámutatnak arra, hogy a szereplői szintű áralkalmazkodás hatást gyakorol a versenytársak árazási viselkedése. A tanulmány kitér arra is, hogy az alkalmazkodás aszimmetrikus, ami konkrétan azt jelenti, hogy nagyobb mértékű akkor, ha árcsökkenésre kerül sor. A szerzők kiemelik továbbá, hogy az áralakulást erőteljesebben befolyásolni képes szereplők szempontjából a versenytársak árazási viselkedésének jelentősége vélhetően kisebb. Fontos megállapítás Koga et al. (2019) részéről még az is, hogy a megnövekedett keresleti bizonytalanság elősegíti az aktorok árkorrekcióját, valamint e bizonytalanság következtében enyhül a keresleti viszonyok változásának befolyásoló ereje az áralkalmazkodási valószínűségre.

Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy az árheterogenitás mélyrehatóbb magyarázatához az elméleti vizsgálódások alapvetően a sokszereplős, különösen is a monopolisztikus versenykörülmények további elemzését teszik szükségessé, noha a piac szerkezetén, a versenykörnyezeten túl számos egyéb tényező is befolyásolja az árdiszperziót. Mivel pedig a sokszereplős és monopolisztikus viszonyok vizsgálatának az egyik legalkalmasabbnak módja a játék- és hálózatelmélet metodológiájának, valamint az ágens-alapú modellezés eszközrendszerének az alkalmazása, ezért ezeket a módszertanokat a soron következő két különálló alfejezetben tárgyalom – ahogy azt már a fejezet elején említettem.

3.1. Heterogenitás és ágens-alapú modellek

Az ágens-alapú modellek jellegzetessége a valós (érdemi) heterogenitás, valamint a lokális *peer-to-peer* interakciók jelenléte (vö. Tesfatsion 2001). Ahogy fentebb említettem, ez a megközelítés elsősorban numerikus szimulációkra támaszkodik. Ezzel együtt az

egyes modellek felépítése mögött lényeges módszertan húzódhat meg. Mindehhez érdemi bevezetőt nyújthatnak a szereplők heterogenitását szem előtt tartó, Caiani et al. (2016) és Cowan és Jonard (2003) által szerkesztett könyvek.

Annak ellenére, hogy a sokszereplős jelleg más módszertant használó munkákban is kidomborodhat, mégis a lokális *peer-to-peer*-fókusz különösen az ágens-alapú modellek karakterisztikájához tartozik. A bevezetőben már említett heterogén ágensekkel dolgozó modellek, ezen belül is a HANK-modell, kiemelten fontosak a közgazdaságtani elemzésekben. Ezen a területen számos publikáció született, amelyek közül egyebek mellett megemlítendő Deák et al. (2017), Hosszú és Mérő (2017), Kaplan et al. (2018) vagy Salle et al. (2012). Ahogy arra fentebb utaltam, különösen azért fontosak ezek a modellek, mert a legutóbbi, a kétezres évek első évtizedének végén jelentkező gazdasági válság számos kritikát hívott életre a DSGE-modellekkel szemben (lásd Váry 2015). E modellek jelentős hiányossága azonban, hogy nélkülözik a valódi heterogenitást, amely egy valós gazdasági környezetet, piacszerkezetet figyelembe véve irrealisztikusan hat. Úgy tűnik, hogy a viszonylag egyszerű módszertani kezelhetőség érdekében áldozatul esett a gazdasági és piaci struktúrák tényleges sokszínűsége. E szereplők továbbá tökéletesen informáltak is, amely a problémát csak tovább növeli. Az ágens-alapú modellek módszertanának alkalmazása úgy tűnik manapság felfutó ágban van, jól bizonyítja ezt a számos, ezen a területen megjelenő publikáció.

Dolgozatom szempontjából Kirman és Vriend (2001) cikkét említeném. A szerzők egy ágens-alapú számított közgazdaságtani (ACE-) modell keretében kiskereskedelmi halpiacot vizsgáltak a magas lojalitás és az árdiszperzió vonatkozásában. A modellben az eladók ármeghatározók, valamint az eladandó mennyiség és a hűséges vásárlók iránti attitűd tekintetében is ők döntenek. Ezzel szemben a – korlátozott kognitív képességekkel bíró – vevők arról határoznak, hogy melyik árakat fogadják el, továbbá melyik eladótól vásárolnak. Számomra az elemzésből az lényeges, hogy egy koevolúciós folyamat eredményeként képesek voltak magyarázni az árdiszperziót. A szerzők szerint a cikkben megjelenő alapprobléma koordinációs természetű, és ebből a szempontból a lojalitás koordinációs eszközként funkcionál. Kirman és Vriend (2001) a konkrét modell következményeként kiemeli, hogy az árdiszperzió magyarázatához például nincs szükség arra, hogy feltevéssel éljünk a mögöttes szociális hálózatról, hanem modelljük által inkább a piacok mögöttes ösztönzési szerkezetére világítanak rá.

3.2. Heterogenitás, játék- és hálózatelméleti megközelítés

Mivel a játékelmélet kiemelt jelentőséggel bír a piacszerkezetek modellezése tekintetében, ezért a mostani alfejezetben több-kevesebb részletességgel erre a területre fókuszá-

lok, és során bizonyos mértékben támaszkodom Szabó és Sebestyén (2020) szakirodalomi bevezetőjére is. Elöljáróban megjegyzem, hogy több módszertani megközelítés a piacszerkezeteket mint hálózatokat veszi szemügyre, és ennek megfelelően vizsgálja azokat. Hálózatelméletről a korábbiakban ugyan érdemben nem tettem említést, azonban ebben a részben, valamint a dolgozat modelljében már rávilágítok ennek a területnek a szemléletés megközelítésmódjára is.

Annál is inkább jelenőséggel bír e módszertan, mert olyan összetett rendszerekben, mint amilyenek bizonyos típusú piaci szerkezetek, a mögöttes interakciós struktúra analízise nélkül vélhetően csak meglehetősen torzított képet kaphatunk a rendszer egészéről, továbbá annak működéséről. A hálózatelmélet szemléletmódja, módszertana számos tudományterületen vált ismertté, amelyről világosan tanúskodik például Barabási et al. (1999, 2000), Csermely (2009/2006) vagy Barabási és Pósfai (2016) munkája. Nyilvánvalóan a gazdaság- és piacmodellezés sem lehet kivétel ez alól a folyamat alól, amelyet az alábbiakban hivatkozott munkák is igazolnak.

A két legismertebb hálózati szerkezet vélhetően az Erdős–Rényi-típusú véletlen hálózat, valamint a skálafüggetlen hálózatok. Mindkét típusú struktúrát Barabási et al. (1999) nyomán mutatom be. Az Erdős–Rényi-féle véletlen hálózat generálásának algoritmusa az alábbi lépések szerint írható le:

1. kiindulunk $N > 0$ csúcsból és zérus élből;

2. tetszőleges két különböző csúcsot p_{ER} valószínűséggel kötünk össze.

Barabási et al. (1999) Erdős és Rényi eredménye alapján közli, hogy annak a valószínűsége, miszerint egy tetszőleges csúcs foka $k \leq N - 1$, Poisson-eloszlást követ:

$$\mathbf{P}(X_i = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

ahol X_i jelöli az i-edik csúcs fokszámának valószínűségi változóját ($i = 1, 2, \ldots, N$), $\lambda = \binom{N-1}{k} p_{\mathrm{ER}}^k (1 - p_{\mathrm{ER}})^{N-1-k}$ a Poisson-eloszlás paramétere (várható értéke).

Amint arra a bevezetőben utaltam, a nagyméretű hálózatok skálafüggetlen struktúrákba szerveződnek, amely azt jelenti, hogy esetükben a fokszámeloszlás egy negatív kitevőjű hatványfüggvénnyel adható meg (Barabási et al. 1999). Az említett szerzők munkájukban bemutatnak egy olyan algoritmust, amelyik az úgynevezett preferenciális kapcsolódás alapján képes skálafüggetlen hálózatot előállítani. Az eljárás lépései a következők:

1. kiindulunk m_0 csúcsból ($t = 0$), amelyhez minden lépésben egy $m \leq m_0$ élet tartalmazó csúcsot adunk hozzá, úgy hogy az új élek már a rendszerben jelenlévő csúcsokhoz kapcsolódjanak;

2. annak a valószínűsége, hogy a t-edik időpontban egy új él egy már meglévő i csúcshoz kapcsolódik ($t \geq 1$): $k_{i,t-1} / \sum_{j=1}^{m_0+t-1} k_{j,t-1}$, ahol $k_{i,t-1}$ jelöli az i-edik csúcs $(t-1)$-edik időpontbeli fokszámát ($i = 1, 2, \ldots, m_0 + t - 1$).

A gazdasági hálózatokkal foglalkozó munkák közül figyelmet érdemel Acemoglu et al. (2012), Acemoglu et al. (2016), Acemoglu és Azar (2020), Bramoullé et al. (2014), Candogan et al. (2010) vagy De Martí és Zenou (2015). Az említett publikációk közös jellemzője, hogy többszereplős modellekkel dolgoznak. Emellett nagy jelentősége van a kapcsolatrendszer milyenségének, másként a hálózati topológiának is. Ugyanakkor ezeknek a szakirodalmaknak megvannak a maguk nyilvánvaló specifikumai: gazdasági sokkok, ármeghatározás vagy a nem teljes informáltság kérdése. Mindebből azonban már látszik, hogy dolgozatomat illetően releváns munkákról van szó.

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a szerkezeti, topológiai aspektusok tekintetében a szakirodalom nemcsak általános, hanem konkrét hálózati szerkezetekkel is foglalkozik. Jó példa erre Acemoglu et al. (2016) tanulmánya, amelyben a szerzők szerepeltetnek olyan speciális struktúrákat, mint a csillag vagy gyűrű interakciós hálózat. Ezzel rámutatnak a kézzelfogható esetek vizsgálatának jelentőségére, amely gyakorlatot disszertációmban jómagam is átveszem. A szerzők munkájában találkozunk továbbá olyan mutatószámokkal, amelyek a szereplők hálózati hatását illetve a hálózat szerkezetét kívánják meghatározott szempontból megragadni. Ezek az általánosított Leontief-inverzre épülnek, és közülük kiemelt jelentőséggel bír az úgynevezett Bonacich-centralitás (lásd Bonacich 1972, 1987).[10] Utóbbi központi szerepet játszik nemcsak Acemoglu et al. (2016) tanulmányában, hanem más szerzők munkáiban is. Egyeben mellett emiatt a fogalmat a következő bekezdésben röviden ismertetem, így megkönnyítve a további szakirodalmak megértését is.

Bonacich (1987) definíciója szerint adott $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrix,[11] valamint α és β paraméterek esetén a $\mathbf{c}(\alpha, \beta)$ centralitásvektor i-edik koordinátája az alábbi:[12]

$$c_i(\alpha, \beta) = \sum_j (\alpha + \beta c_j(\alpha, \beta)) a_{ij}, \tag{3.1}$$

ahol a_{ij} a kapcsolati mátrix i-edik sorának j-edik eleme, α és β paraméterek tekintetében pedig a hivatkozott szerző munkájában található bővebb magyarázat. Utóbbit felhasználva rámutatok a definiált mérték néhány jellegzetességére. Egyrészt α egy olyan skálázási

[10] Néhány modellben használatos a Katz–Bonacich-centralitás elnevezés. E tekintetben lásd még Katz (1953) munkáját, amelyre Bonacich is utal a hivatkozott 1987-es cikkében, rámutatva az általa és Katz által elemzett mutató kapcsolatára.

[11] Disszertációm vizsgálódásaiban a kapcsolati mátrix szintén fontos szerepet tölt be, így az helyet kap annak mind elméleti, mind az erre épülő szimulációs-empirikus részében.

[12] Bonacich (1987) alapján megadható az explicit vektoros alak is, feltéve, hogy az $\mathbf{I} - \beta\mathbf{A}$ mátrix invertálható: $\mathbf{c}(\alpha, \beta) = \alpha(\mathbf{I} - \beta\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{1}$, ahol $\mathbf{I}$ a megfelelő méretű egységmátrix, $\mathbf{1}$ pedig csupa egyesből álló összegzővektor.

paraméter, amely a centralitásvektor hosszára van hatással. Érdemes e ponton visszautalni az előző bekezdés megfelelő lábjegyzetére és rámutatni, hogy α megfelelő választása mellett $\mathbf{c}(\alpha, \beta)$ vektor kapcsolatba hozható a Katz által 1953-ban publikált mértékkel. Másrészt β egy olyan – megfelelő megszorításokat tekintetbe vevő – valós értékű paraméter, amely megmutatja, hogy egy hálózati szereplő pozíciója mennyiben függ azoknak a helyzetétől, akikkel kapcsolatban van. Megjegyzendő, hogy β nagysága befolyásolja azt, miszerint a centralitásvektor elemei inkább lokális vagy globális mérőszámok-e, ezzel rámutatva a közvetlen és közvetett kapcsolatok jelentőségére (például, ha $\beta = 0$, akkor csak a közvetlen szomszédok számítanak). Megjegyzem, hogy elemzésemben relevanciával bírnak mind a közvetlen, mind pedig a közvetett hálózati kapcsolatok, ilyen értelemben a munkám vonatkozó részében alkalmazott megközelítési mód rokonítható Bonacich e mértékével. Sőt a sajátvektor-centralitást (lásd A. függelék) mintegy általánosítja a most ismertetett centralitás-fogalom (vö. Bonacich 1987).

E rövid kitérő után folytatom a szakirodalom-ismertetést további, a téma szempontjából általam fontosnak tartott munkákkal. Ezekből látható lesz, hogy a játék- és hálózatelmélet hatékonyan ötvözhető, különösen amikor a hálózati karakterisztika és az egyensúlyi mennyiségek kapcsolatára mutatnak rá egyes szerzők. A hálózati jellemzők és az egyensúly kapcsolatának elemzése tekintetében – amint arra fentebb utaltam – egyedülálló fontosságú az imént Bonacich (1987) cikke nyomán definiált centralitás.

Ugyan foglalkoztam már fentebb az input-output modellek vázlatos bemutatásával, ezen a ponton viszont szeretnék részletesben is rámutatni ennek (pontosabban egy általánosított változatának) a hálózatelméleti aspektusára. Ebből a szempontból ismét Acemoglu et al. (2016) munkáját emelem ki. Itt a szerzők az egyes termelők kibocsátását (mint outputot) egy olyan, úgynevezett interakciós függvény definiálásával határozzák meg, amely figyelembe veszi azon szereplők kibocsátását (mint inputot), amelyek a szóban fogó termelővel kapcsolatban vannak – annak kvázi beszállítanak. Következésképpen az ekként meghatározott interakciós függvények magukba sűrítik a gazdasági hálózatot. Az interakciós függvény argumentuma az adott termelőhöz rendelt idioszinkratikus sokk, így magyarázva annak termelését. Az egyes idioszinkratikus sokkok hatása aztán makroszinten is jelentkezik, amelyet a szerzők a mikroszintű sokkok lineáris kombinációjával illetve az ebből számított volatilitás mértékével ragadnak meg. Megállapítják, hogy e lineáris kombináció vagy a volatilitás függ a kapcsolati szerkezettől, pontosabban szólva a Bonacich-centralitástól. A leírtakhoz kapcsolódik Ballester et al. (2006) cikke, amely az egyedi kimeneteket vizsgálja a csoportviselkedés függvényében (*peer effect*). A szereplők keresztfüggőségeket tartalmazó lineáris-kvadratikus hasznossági függvényét felhasználva a szerzők a kereszthatásokat felbontják szereplőspecifikus, globális és lokális interakciós komponensekre. Rámutatnak, hogy az individuális aktorok egyensúlyi kimenetei arányo-

sak a (súlyozott) Bonacich-centralitással, valamint, hogy az aggregált kimenet egyensúlyi értéke növekszik a lokális interakciók sűrűségének illetve e lokális hálózat méretének növekedésével. A szerzők saját bevallásuk szerint tehát kapcsolatot teremtenek az egyensúly és a hálózat bizonyos karakterisztikái között, amely a cikkből egyértelműen ki is rajzolódik. E szerzők egy további kapcsolódási pontja Acemoglu et al. (2016) munkájához az, hogy ők is egyetlen szereplőtípust vesznek figyelembe.

Itt szeretném megjegyezni, hogy nem véletlenül hangsúlyoztam fent a függvényformát. A lineáris-kvadratikus függvény ugyanis tapasztalatom szerint számos hálózati szerkezetet figyelembe vevő játékelméleti modellnek lényeges eleme, ezért egyes munkák kapcsán ennek meglétét mégis külön is hangsúlyozom. Emellett arra is utalok, hogy a disszertáció alábbiakban bemutatásra kerülő modelljében is szerepel lineáris-kvadratikus függvény, méghozzá a termelői nyereségfüggvény vonatkozásában.

Ugyancsak egy szereplőtípussal állunk szemben Calvó-Armengol et al. (2009) modelljében, amely egy ismertségi hálózatnak az egyéni teljesítményre gyakorolt hatását elemzi. Annak ellenére azonban, hogy csak egyetlen aktortípus szerepel a modellben, a kifizetőfüggvényben mégis jellegében két eltérő változóval találkozunk, amelyek elkülöníteni igyekeznek az egyéni, szereplőspecifikus és strukturális, ismeretségi kapcsolatokból eredő hatásokat. A szerzők megmutatják, hogy az általuk vizsgált játéknak egyetlen Nash-egyensúlya van. További jellegzetessége a cikknek, hogy a hálózatelmélet eszköztárából (ismét) találkozunk a Katz–Bonacich-centralitással. Az ismertetett modellvariáció tekintetében a szerzők megmutatják, hogy az egyensúlyi teljesítmények arányosak az említett centralitás-mutatóval. Megjegyzem, hogy fontos szerepet kap ebben a munkában a lineáris-kvadratikus kifizetőfüggvény, amelyet egy adott hálózati struktúrán definiálnak a szerzők.

Az előzőekkel több szempontból rokon (például lokális interakciók, hálózati pozíció szerepe), egyfajta aktort tartalmazó többszereplős modellt mutat be Belhaj et al. (2014) cikke. A szerzők hálózati játékot elemeznek, amelyben a szereplők viselkedése függ szomszédaik akcióitól. A munka célja a Nash-egyensúly elemzése, az egyensúlyi értékeknek a hálózati pozícióval való kapcsolatának vizsgálata. Utóbbi tekintetében Belhaj et al. (2014) Bonacich-centralitásra támaszkodnak. Kimutatják, hogy a központi szereplők egyensúlyi értéke alacsonyabb, ugyanakkor ismertetnek olyan szituációkat is, ahol ennek a fordítottja tapasztalható, vagyis a hálózati pozíció igenis pozitívan függ össze az egyensúlyi értékkel (központibb szereplőknek magasabb egyensúlyi értékei lesznek). Ugyan kimondottan árindex nincs a modellben (hiszen a változó egy általános értelemben vett akcióprofil), abban mégis megjelenik olyan kifizetőfüggvény, amelynek argumentumában a hálózatban szomszédos aktorok akcióinak összege szerepel. Megjegyzem, hogy a nem specifikált, általános akcióprofil szerepeltetése nem csak Belhaj et al. (2014) háló-

zati játékos cikkének a sajátja, hasonló a helyzet például Acemoglu et al. (2016) tanulmányában is.

Eladókat és fogyasztókat magába foglaló többszereplős hálózati szerkezettel van dolgunk Bloch és Quérou (2013) cikkében. Itt azonban nem az ármeghatározó fél és a fogyasztók kapcsolatrendszerére épülő piacszerkezetről van szó, hanem az adott hálózati struktúra a fogyasztók viszonyrendszerében bír jelentőséggel. A cikkben fontos, hogy az optimálisan árazó monopolista különbséget tehet a fogyasztók között, azokhoz eltérő árakat rendelve. Az egyik modellváltozatában a fogyasztók döntéseiket lényegét tekintve a termékárat és a lokális hálózatban szomszédaik fogyasztási szokásainak valószínűségeit figyelembe véve hozzák meg. Ebben a döntési szabályban a termékár nem kerül összefüggésbe semmiféle árindexszel, azaz ezen a ponton a relatív ár nem lesz számukra meghatározó. Egy másik változatban azonban a fogyasztók figyelembe veszik a szomszédaikra kiszabott árak átlagát, amelyre a referenciaár kifejezést használja a cikk. E modellben is fontos a hálózati pozíció, amelyet a Katz–Bonacich-centralitás mér. Ennek segítségével teremtenek összefüggést a szerzők az optimális árak és a hálózati pozíció között, hangsúlyozva, hogy ez a kapcsolat függ a piacszerkezettől és a költségfüggvény alakjától. Hasonlóan Bloch és Quérou (2013) munkájához Chen et al. (2018) is egy olyan hálózati szerkezetet tart szem előtt, amelyben egy fogyasztói interakciós háló játszik szerepet. Az eladói oldal egy duopolista piacszerkezetet alkot – azonban a cikk elemzése során szól monopolista szcenáriókról is. A fogyasztók tehát kétfajta termék közül választhatnak, és ezt a választást a kéttagú lineáris-kvadratikus kifizetőfüggvényük határozza meg. E döntést azonban – a kifizetőfüggvényen keresztül – befolyásolja még azon fogyasztók köre is, amelyek egy adott fogyasztóval kapcsolatban állnak, sőt a teljes fogyasztási kiadás is. A fogyasztási kiadás figyelembevételén túl azonban ebben a modellben sincs jelentősége a relatív termékáraknak. Annál inkább van jelentősége viszont a Katz–Bonacich-centralitásnak, például az egyensúlyi árvektort illetően.

Szintén említésre érdemes Aoyagi (2018) konstrukciója, amely az eladói oldal piacszerkezetét tekintve duopóliumot feltételez, és ez rokon vonásokat hordoz Chen et al. (2018) munkájával, hiszen például az utóbbi is vizsgál árazási stratégiákat duopolista környezetben. Először Aoyagi (2018) munkáját mutatom be röviden, ismertetve annak leglényegesebb sajátosságait. A modell szempontjából először azt emelném ki, hogy alapvetően két szereplőtípus (eladók és fogyasztók) jelenik meg abban. A fogyasztói oldal interakcióban van az eladókkal, amely definiálja az alapstruktúrát. Az értékesítést végző szereplőkkel szemben a fogyasztói oldalt tekintve nincs megkötés e szereplőtípus számosságát tekintve. Azonban a modell logikájából következően a fogyasztók csak egyetlen eladóval kerülnek kapcsolatba. Ebben az elméleti keretben a fogyasztói döntést a fogyasztók közötti kapcsolatrendszer alakítja. Egy fogyasztó szemében az eladók által kínált jószágok

értéke attól függ, hogy az adott vevő hány szomszédja vásárolja egyik vagy másik terméket. Következésképpen itt ismét a hálózati lokalitás szerepe kerül előtérbe. Az eladói oldal különböző árazási stratégiákat alkalmaz, amelyet a hálózati szerkezet illetve az abból származó hatás alakít, hogy egy adott fogyasztó által vásárolt termékkel hányan élnek még szomszédai közül – vagyis hányan veszik meg ugyancsak ezt a terméket. Az utóbbi effektus szempontjából a szerző megkülönbözteti a hatás teljes hiányának esetét, valamint úgynevezett lineáris és nemlineáris szituációkat. Ilyen árazási stratégia a határköltségen való ármeghatározás illetve a pozitív és negatív fogyasztói árdiszkrimináció (egyes fogyasztóknak kedvezmények nyújtása mások rovására) is. Aoyagi (2018) cikke ezen árazási stratégiák közül keresi az egyensúlyit. Chen et al. (2018) munkája azonban inkább illeszkedik a korábban tárgyalt hálózatokon értelmezett játékelméleti modellek sorába, például oly módon, hogy az ilyen típusú modellekben számtalanszor előkerülő lineáris-kvadratikus kifizetőfüggvénnyel dolgozik, illetve a hálózati pozíció befolyásoló erejét is elemzi. Utóbbi szerzők esetében is szerepet játszik annak hatása, ha egy fogyasztó szomszédai is ugyanattól az eladótól vásárolnak-e. Az egyensúlyi árakat vizsgálva kiderül, hogy az utóbb említett szereplők alacsonyabb áron értékesítenek a központibb pozíciójú fogyasztóknak az ő szomszédaikra gyakorolt hatása miatt. A hálózati karakterisztikát a hálózati pozíció tekintetében Chen et al. (2018) is a Katz–Bonacich-centralitás révén vonják be vizsgálódásaikba. Az árakat kettébontják, annak egyik része hálózatfüggetlen, míg másik komponense arányos a Katz–Bonacich-centralitással. Kétvállalatos esetben a szerzők rámutatnak arra, hogy az egyensúlyi árak erőteljes függése a hálózati szerkezettől a vállalatok számára azért is különösen jelentős, hiszen ez azt jelenti, hogy a struktúra ismerete kihatással van a nyereség-maximalizálásra. Ezzel összefüggésben említésre méltó eredménye Chen et al. (2018) cikkének még az is, hogy például sűrűbb hálózatokban az egyensúlyi vállalati profit csökkenhet, megerősítve a hálózati szerkezet imént említett lényeges mivoltát. Megjegyzem, hogy a dolgozatom modelljében az egyensúlyi árak vizsgálatán túl a nyereségek kérdésére jómagam is kitérek, arra törekedve, hogy következtetéseket vonjak le a mögöttes struktúra és a nyereség kapcsolatát illetően.

Az utolsóként ismertetett szakirodalom Ushchev és Zenou (2016, 2018) két munkája. Ezekben a tanulmányokban bemutatott modell monopolisztikus piacszerkezetet, így termékdifferenciálást feltételez, de emellett egy új szempont, a térgazdasági jelleg is fellelhető. A szóban forgó modellben két szereplőtípus van, az értékesítő oldal szereplői (vagy termékvariánsok) és fogyasztók. A fogyasztók száma adott, megegyezik a termékek számával, ami jelentős korlátozó feltétel. Adott továbbá egy termékek közti interakciós struktúra, amelyben a hálózat csúcsai az egyes termékvariánsokat reprezentálják, az élek pedig aszerint kerülnek behúzásra két csúcs között, hogy a nekik megfelelő termékek helyettesíthetők-e egymással vagy sem. A szerzők alapján elmondható, hogy ez a

struktúra lényegében egy olyan hálózati szerkezet nyomán keletkezik, amelyben két vállalat között akkor van kapcsolat, ha ugyanahhoz a piaci szegmenshez tartoznak. Ebben a hálózatban kapnak helyet a fogyasztók is, akiket az általuk leginkább kedvelt termékvariánshoz rendel a modell, és lineáris-kvadratikus hasznossági függvénnyel értelmezi az ennek nyomán előálló fogyasztói hasznot. A fogyasztói oldal döntéseit egyes korábbi modellekhez hasonlóan lineáris-kvadratikus hasznossági függvény alapján hozza meg, amely döntések figyelembe veszik a termékárak módosított Bonacich-centralitásokkal súlyozott átlagát. Ez az átlagár vagy árindex tehát nem attól függ, hogy az egyes fogyasztók mely eladó termékeit fogyasztják. A szerzők rámutatnak, hogy az egyensúlyi árak alakulását a Bonacich-centralitások mellett a fogyasztók közötti fizetési hajlandóság is befolyásolja. Utóbbi azt jelenti, hogy minden fogyasztó vonatkozásában van egy általa leginkább előnyben részesített termékvariáns, amellyel szemben a legmagasabb a fizetési hajlandósága. Az eddigieken túl Ushchev és Zenou (2016, 2018) vizsgálják azt is, hogy a helyi termékdifferenciálás és az úgynevezett térfüggő diszkontfaktor milyen módon hat az egyensúlyi árakra. Egyebek mellett igazolják, hogy csillaghálózatban a központi pozíciót elfoglaló értékesítő szereplő nem feltétlenül bír nagyobb monopolerővel a periférián lévőknél. Ezt a szerzők azzal magyarázzák, hogy ugyan a centrális eladónak jobb hozzáférése van a piachoz a periférián lévő társaihoz képest, azonban azt sem szabad elfelejteni, hogy utóbbiakkal versenyeznie is kell. Térgazdasági szempontból egy további érdekesség, hogy a térfüggő diszkontfaktor növekedése áremelkedést eredményez. Mindezek persze azt is mutatják, hogy a hálózati, játékelméleti modellek egy érdekes kiterjesztése lehet a térgazdasági szempontok bevonása.

A citált munkák közül mindegyikben megjelenik a lokális *peer-to-peer*-tulajdonság. Ezen a tulajdonságon keresztül a szóban forgó tanulmányok képesek a hálózatokat is vizsgálódásukba bekapcsolni. Nagyon fontosnak tartom ismét kiemelni, hogy több tanulmány nem specifikálja kifejezett módon az játékok akcióprofiljainak elemeit (például árak, kibocsátások). Ez persze egy szélesebb körű interpretációnak nyit utat. Más munkák konkrétan megnevezik az egyes változókat. Egy további fontos észrevétel, hogy a modellek egy része egyetlen szereplőtípust definiál, és ezeknek az aktoroknak az interakciói alkotják az elemzett struktúrát. Ebben az esetben általában ugyanolyan szerkezetű kifizetőfüggvénnyel rendelkeznek a szereplők, ami az alkalmazhatóság körét leszűkítheti. Például nem biztos, hogy eladók és fogyasztók kapcsolatrendszerén alapuló szituációra értelmezhetők ezek a modellek.

Megjegyzem még, hogy noha a hálózati jelleget hangsúlyoztam inkább, mégis a játékelméleti megközelítés hasonlóan fontos a fenti modellek egy részében. Ezért nem szabad idegenkedni a jól ismert játékelméleti eszköztár és a – talán kevésbé ismert – hálózatelméleti módszertan egyidejű alkalmazásától. Ezek ugyanis olyan korábban nem ismert

jelenségekre vethetnek fényt, amelyek gazdagítják a piacszerkezetek szakirodalmát.

Az alábbiakban látható egy összefoglaló táblázat (3.1. táblázat), amelyikben bizonyos szempontok mentén összevetem és összefoglalom az általam vizsgált szakirodalmak közül a legfontosabbakat. Ezen munkákat a szakirodalmak azon köréből választottam, amelyek megközelítésmódjukat tekintve legközelebb állónak véltem az alábbiakban ismertetett modellhez. Az összehasonlító összefoglalás az alábbi szempontok szerint történik:

1. szereplőtípusok száma;
2. a termékár döntési változóként való megjelenése;
3. az árindex szerepe;
4. centralitás-mutató jelenik-e meg a cikkben;
5. a szereplők számának nem túlspecifikáltsága (vagyis nincs semmilyen jelentősebb korlátozás a szereplőszámra nézve).

A táblázat utolsó sorában szerepeltetem a disszertációmban vizsgált modellt, amelyet szintén összevetek a felsorolt szakirodalmakkal. Az iménti szakirodalom-elemzéshez képest tehát új és előremutató elem, hogy itt már előjön a saját kutatásom is, ezzel elmélyítve azt a kontextust, amelyben későbbiekben bemutatott analízis zajlani fog. A szóban forgó táblázat segítségével bizonyos mértékben azt is demonstrálni szeretném, hogy a felsorolt munkákhoz képest melyik az a részterület, ahol a dolgozat némi újdonságot, eltérő nézőpontot tud felmutatni.

Végül megjegyzem, hogy a fenti szempontok alapján úgy tűnik, hogy a dolgozat modelljéhez három tanulmány különösen is közel áll. Ezek közül az egyik Bloch és Quérou (2013) munkája. Azt azonban rögtön hozzáteszem, hogy ezeknek a szerzőknek a megközelítése mégis eltér a disszertáció modelljétől. Emlékeztetek ugyanis arra, hogy Bloch és Quérou (2013) cikkükben az árak alakulását alapvetően egy fogyasztói hálózatot figyelembe véve vizsgálják. Megjegyzendő, hogy az áraknak a hálózati pozícióval való kapcsolatát a piacszerkezet ugyan befolyásolja, még sincs szerepe az ármeghatározó oldal és a fogyasztók közötti kapcsolatrendszernek. Ugyan a munka egyik modellvariációjában szerepel a már említett referenciaár, az – ahogy fentebb ismertettem – a szomszédos fogyasztókhoz rendelt árak átlaga, nem pedig a fogyasztó által vásárolt termékváltozatok árainak átlaga, amint azt az alábbiakban, a dolgozat modellje kapcsán látni fogjuk. Következésképpen ezt a referenciaárat nem tekintem árindexnek. A másik kettő rokonjellegű tanulmány Ushchev és Zenou (2016, 2018) dolgozata. Az utóbbiak tekintetében mindössze annyit jegyzek meg, hogy a bennük tárgyalt modell ugyancsak a hálózati szerkezet definiálásakor eltérést mutat a dolgozatomban lévő modellhez képest. Ahogy ugyanis a

szóban forgó munkákból látható, a hálózati szerkezetet voltaképpen a termékek helyettesíthetősége határozza meg.

3.1. táblázat. Modellek összevetése adott szempontok szerint

Modelljellemzők	Szereplőtípusok száma	A termékár döntési változó	Van árindex	Van centralitás-mutató	Nem túlspecifikált a szereplőszám
Acemoglu et al. (2016)	1	✗	✗	✓	✓
Aoyagi (2018)	2	✓	✗	✗	✗
Ballester et al. (2006)	1	✗	✗	✓	✓
Belhaj et al. (2014)	1	✗	✗	✓	✓
Bloch és Quérou (2013)	2	✓	✗	✓	✓
Calvó-Armengol et al. (2009)	1	✗	✗	✓	✓
Chen et al. (2018)	2	✓	✗	✓	✗
Ushchev és Zenou (2016, 2018)	2	✓	✓	✓	✗
A disszertáció modellje	2	✓	✓	✓	✓

✓: a szempont igaz, ✗: a szempont hamis

(*Saját szerkesztés*)

4. Az alapmodell bemutatása

Ebben a fejezetben bemutatom a disszertáció alapmodelljét, amely számottevően merít Szabó és Sebestyén (2020) és Sebestyén és Szabó (2022) tanulmányából. Maga a fejezet lényegét tekintve az első kutatási kérdés megválaszolását szolgálja, tehát arra vagyok elsősorban kíváncsi, hogy nem feltétlenül szimmetrikus viszonyok közepette (ami egyben az informáltság sérülését is jelenti) van-e a definiált modellben egyensúlyi ár- és kibocsátásvektor, vagyis az alapmodell az egyensúlyok kérdéskörét különösen is szem előtt tartó, piac- és játékelméleti modellek köréhez tartozik. Ugyanis az korántsem magától értetődő, hogy például egy jelentősen aszimmetrikus struktúra nem képezi-e akadályát az egyensúly létrejöttének. Ezt követően persze vizsgálni szükséges az egyensúlyi vektorok és a többi releváns egyensúlyi érték nemnegatív voltát is. Mindemellett elemzésem rá kíván világítani a szóban forgó egyensúlyi vektorok és a hálózati szerkezet kapcsolatára. Ezen a ponton amennyire csak lehetséges csatlakozni igyekszem az előző alfejezet szakirodalma által kijelölt csapásirányhoz. Ezt főként úgy teszem, hogy az egyes szereplők közötti interakciókra építem a modellt, valamint az így létrejövő struktúra hatásainak vizsgálatára is kitérek. A soron következő analízist azért tartom fontosnak, mert ahogy azt láthattuk, a hagyományos közgazdaságtani modellek túlságosan idealisztikus feltevéseinek feloldására ezidáig jelentős törekvések történtek, és ennek – minden hiányossága ellenére – vélhetően az egyik legalkalmasabb eszköze egy valódi heterogenitást felmutató, *peer-to-peer*-megközelítést követő modell. Ugyan a szereplők (termelők/eladók és fogyasztók) interakcióin alapuló hálózati struktúra elemzésére már ebben a fejezetben is törekszem, mégis a valós hálózatokat jellemző skálafüggetlen struktúrának csak a szimulációs-kalibrációs részben lesz igazán szerepe. Nem utolsósorban megjegyzem, hogy a lényegében Bertrand-féle oligo- vagy monopolisztikus szituációt megragadó alapmodellt játékelméleti keretek között prezentálom, így egy újabb szempontból csatlakozom a megelőző egységekhez. Maga az alapmodell azért Bertrand-típusú, mert mint látni fogjuk, a termelők döntési változója a termékár. A félreértések elkerülése végett e ponton fontosnak tartom hangsúlyozni, hogy az alapmodellben a termékárak mindig termelők által meghatározott árak.

Ennek a fejezetnek elsősorban tehát az alapmodell, annak több szempontból való elemzése lesz a tárgya, és ahogy írtam, ezen belül nagy hangsúlyt fektetek az egyensúlyi termékárvektor egzisztenciájának és unicitásának igazolására. Utóbbi teszi ki a fejezet jelentős részét, amelynek során nagymértékben Szabó és Sebestyén (2020) cikkére támaszkodom. Ahogy azt fentebb hangsúlyoztam, ez az eredmény a dolgozat egyik nem

magától értetődő mérföldköve, ugyanis a „jól viselkedő” szimmetrikus helyzettől való eltérés szükségessé teszi, hogy az egyensúly lehetségességének kérdésével részletekbe menően foglalkozzam. Megjegyzem, ennek során több bizonyítást is bemutatok, amelyek nemcsak megerősítik az eredeti gondolatmenet megállapításainak helyességét, hanem bemutatnak olyan módszertani eszközöket is, amelyek hasonló problémák esetében eredménnyel alkalmazhatók. Az első okfejtést követő, de megítélésem szerint a disszertáció főszövegéhez csak lazábban kapcsolódó, így a dolgozat B. függelékében helyet kapó (kiegészítő) bizonyítások a szóban forgó gondolatmenetnek csak egyes részeit ismétlik meg újra, más köntösben, más módszertant használva. A B. függelék eszmefuttatásai támaszkodnak ugyan az elsőként bemutatott levezetésre, azonban lényeges pontokon el is térnek attól, így mindegyiknek megvan a maga újdonsága. Az első okfejtés abból a szempontból kiemelkedő, hogy annak eredményeként eljárást kapunk az egyensúlyi árvektor kiszámítására.

A fejezet az alábbi egységeket foglalja magában:

1. az alapmodell feltevéseinek ismertetése, a modell bemutatása;
2. az egyensúlyi termékárvektor létezésének és egyértelműségének bizonyítása;
3. az egyensúlyi árak vizsgálata speciális feltétel mellett és az árheterogenitás kérdése;
4. struktúraelemzés és centralitás;
5. a fogyasztás és nyereség vizsgálata;
6. illusztratív példák, különös tekintettel az interakciós hálózati struktúra vonatkozásaira.

Ezek tehát azok a résztémák, amelyek e fejezet szerkezetét alakítják. Az alfejezetek egyben ki is jelölnek egy gondolati ívet, amelyet a későbbiek során be kívánok járni. Ennek során láthatóvá válik, hogy miként épül fel a dolgozat piacszerkezeti modellje, és jut el a piacszerkezet mögött meghúzódó interakciós hálózati struktúra hatásának vizsgálatáig. A szóban forgó lépések természetesen nem mentesek a konkrétumoktól és a számpéldáktól sem, amelyek szintén a dolgozat kitüntetett pontjait képezik.

Az alábbiakban először az alapmodell feltételrendszerét ismertetem, amelyet lényegesnek tekintek az ezt követő elemzés szempontjából. Itt igyekszem lényegre törően, ugyanakkor a fontosabb feltevéseket illetően mégis kellően aprólékosan fogalmazni. Ezt követően nekilátok a részletesebb analízisnek, amelynek során támaszkodom az eddigi elméleti háttérre, amely részben a szakirodalmi egységben, részben az A. függelékében található. Utóbbi kellő gondossággal sorolja fel azokat a leglényegesebb definíciókat, tételeket, amelyek a gondolatmenet követhetősége szempontjából relevánsak.

4.1. Az alapmodell feltevései, alapvető következményei és az egyensúly bevezetése

Mielőtt a formalizált tartalomra rátérnék, sorra veszem az alapmodell szempontjából kulcsfontosságú modellfeltevéseket és jellegzetességeket, amelyekre részben fentebb már tettem utalást:

1. két, nem feltétlenül homogén szereplőtípus van jelen a gazdaságban, termelők és fogyasztók;
2. a két szereplőtípus közötti termelő–fogyasztó kapcsolatrendszert egy előzetesen adott kapcsolati mátrix írja le, a kapcsolatok kialakulásának mikéntjét azonban nem vizsgálom, mert ez nem célja dolgozatomnak, illetve meghaladná annak kereteit is;
3. minden termelőnek van legalább egy fogyasztója, továbbá minden fogyasztó legalább kétféle terméket vásárol, amelynek során a tranzakció költségektől eltekintek;
4. minden termelő egy termékvariánst termel és ennek egyedi árát határozza meg, a termékvariánsok nagymértékben helyettesíthetők (tehát részpiacot modellezünk);
5. a termelők teljesen informáltak fogyasztóikat és azok döntési szabályait illetően;
6. a termelők annyit termelnek – végtelenül osztható – termékeikből, amennyit fogyasztóik hajlandóak megvásárolni (piactisztítás);
7. a termelők csak azokat a termékárakat veszik figyelembe a saját árdöntésük során, amelyekkel fogyasztóik is számolnak (vagyis sérülhet a tökéletes informáltság);
8. az egyes termelők nem ismerik a többi termelő döntési szabályát;
9. a termelők feltételezik, hogy saját árdöntésük nincs kihatással a többi termelő árdöntésére;
10. a termelők döntési változója saját termékáruk (ármeghatározók);
11. a termeléshez a termelők csak – tökéletesen helyettesíthető – munkát (munkaidőt) használnak fel, az időegységre jutó munkabérek azonosak, továbbá nem lépnek fel erőforráshiányból fakadó termelési zavarok;[13]

[13] Ez a feltevés megfelel annak, hogy a termelők egy tökéletes versenyzői munkapiacról vásárolnak munkaerőt. Vagyis folyó piaci áron bármennyit képesek felvenni, mert a piac egészéhez képest a modellezendő részpiac és a vállalatok marginálisak.

12. a fogyasztók nem feltétlenül ismerik vagy veszik figyelembe az összes termék árát, lehetséges, hogy csak egy részpiaccal kapcsolatban vannak információik vagy csak azt tekintik relevánsnak (ezen a ponton sérülhet a tökéletes informáltság);

13. a fogyasztók az általuk fogyasztott termékek közül nem részesítik előnyben egyiket a másikhoz képest;

14. a fogyasztók nem ismerik sem egymás, sem a termelők döntési szabályait;

15. a fogyasztók árelfogadók, tehát nincs közvetlen ráhatásuk a termékárak alakulására;

16. a fogyasztók döntéseik során mindig az adott termék árát hasonlítják össze egy általuk észlelt árindexszel;

17. minden fogyasztó rendelkezik azzal a financiális háttérrel, amely fogyasztásához szükséges (nincsenek likviditási problémáik), és nem takarítanak meg.

Ezen a helyen fontosnak tartom megjegyezni, hogy az alapmodellben a háztartás kifejezés helyett jellemzően a fogyasztó szakkifejezést használom, ugyanis ez a nevesített kategória jóval tágabb jelentéssel rendelkezik. Vagyis nemcsak háztartásként, hanem például ellátási lánc tekintetében közbenső termelőként, esetleg kereskedelmi egységként vagy végső fogyasztóként is értelmezhető. Felhívom továbbá arra is a figyelmet, hogy a formalizált részeknél csak ott és abban az esetben jelölöm a függvényargumentumot, ahol és amikor ezt kifejezetten hangsúlyozni szeretném.

Az összes szereplő számát N, termelők számát $M \geq 2$ jelöli. Innen már következik, hogy $N - M$ fogyasztó van a gazdaságban. Ezenkívül felteszem, hogy $N > M \geq 2$, ami biztosítja, hogy legalább egy fogyasztóval mindenképpen számolni kell. A termelők számának alsó korlátja azért fontos, mert ezzel azt kívánom érzékeltetni, hogy minden fogyasztó legalább kétféle termék közül választhat. Utóbbi kizárja a monopólium lehetőségét, ami egyben már rá is mutat a modell egyik korlátjára, nevezetesen, hogy nem alkalmas az összes piaci struktúra megjelenítésére. Megjegyzem még, hogy a termelőket az $\{1, 2, \ldots, M\}$, a fogyasztókat pedig az $\{1, 2, \ldots, N - M\}$ halmaz elemivel indexelem.

A következő lépésben meghatározom azt az interakciós hálózati struktúrát, amely a modell egyik alapját képezi. A hagyományos piacszerkezeti modelleket meghaladva ez lehetőséget biztosít egyes hálózati tulajdonságok, specifikumok vizsgálatára. Mindehhez egy kapcsolati mátrixot definiálok.

Bevezetjük tehát az $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrixot is, amely i-edik sorának j-edik (általános)

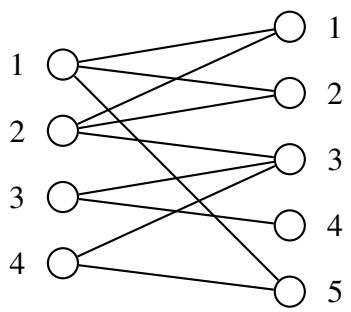
elemét a_{ij} jelöli. A következőképpen definiáljuk:[14]

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ha a } j\text{-edik fogyasztó vásárol az } i\text{-edik termelőtől} \\ 0, \text{ ha a } j\text{-edik fogyasztó nem fogyaszt az } i\text{-edik termelőtől} \end{cases} \tag{4.1}$$

Ez a mátrix exogén, megadja a termelők és fogyasztók kapcsolatrendszeréből álló alapstruktúrát, és mérete $M \times (N - M)$. Másként fogalmazva: egy interakciós hálózati struktúrába ágyazottan cselekszenek termelők és fogyasztók, hiszen a kapcsolati mátrix kijelöli, hogy adott fogyasztó kitől vásárol, másrészt a szimmetria miatt megmondja, hogy adott termelő kinek értékesít. Ez az alapstruktúra lényeges keretrendszert jelent, ezért vizsgálata elengedhetetlen. Mindennek illusztrálására készítettem a 4.1. ábrát, amelynek bal oldalán egy konkrét 4×5-ös kapcsolati mátrix (négy termelő, öt fogyasztó), jobb oldalán pedig az ennek megfelelő gráf rajza látható.

4.1. ábra. Egy konkrét kapcsolati mátrix illusztrációja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Tegyük fel, hogy a j-edik fogyasztónak az i-edik termelő termékével szembeni x_{ij} egyedi fogyasztását (vagy egyszerűbben keresletét) az alábbi lineáris keresleti függvény írja le ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$):

$$x_{ij}(\mathbf{p}) = b_{ij}\left[\gamma_j - \epsilon\left(p_i - \overline{p}_j\right)\right], \tag{4.2}$$

ahol $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_M)^\mathsf{T}$ a termékárakat tartalmazó oszlopvektor (röviden, árvektor), $b_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^{M} a_{kj}$, $\gamma_j > 0$ egy rögzített konstans, $\epsilon > 0$ egy árérzékenységi paraméter, p_i a i-edik szereplő termékének ára, $\overline{p}_j = \sum_{k=1}^{M} b_{kj} p_k$ pedig az j-edik fogyasztó által észlelt árindex. Látható, hogy az x_{ij} egyedi fogyasztásnál a $p_i - \overline{p}_j$ relatív árat veszi figyelembe a fogyasztó. Fontosnak tartom megjegyezni, hogy többszereplős modellkörnyezetben a lineáris termelési függvények használata egyáltalán nem irreális egyszerűsítés, amelyre jó példa Corbett és Karmarkar (2001), Ushchev és Zenou (2016, 2018) vagy Wang et al.

[14] A szakasz elején szereplő megfelelő feltevés alapján az **A** mátrix minden sorában legalább egy egyes szerepel, valamint minden oszlopában legalább kettő egyes található.

(2021) munkája.

A könnyebb átláthatóság miatt b_{ij} átírható ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$):

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_j^C}, \tag{4.3}$$

ahol $d_j^C = \sum_{k=1}^{M} a_{kj}$ – hálózatelméleti terminológiával élve – a j-edik fogyasztó fokszámát, azaz a fogyasztott termékvariánsok számát jelenti. Ezeket a b_{ij}-ket rendezzük a $\mathbf{B}$ mátrixba, úgy, hogy b_{ij} a szóban forgó mátrix i-edik sorának j-edik eleme legyen. Egyszerű ellenőrizni, hogy ennek a mátrixnak a j-edik oszlopát a nulla és $1/d_j^C$ elemek alkotják. A j-edik oszlopban pontosan akkor szerepel zérus, ha $a_{ij} = 0$ (vagyis a j-edik fogyasztó nem fogyasztja az i-edik termelő termékét), illetve akkor található $1/d_j^C$, ha $a_{ij} = 1$ (vagyis a j-edik fogyasztó vásárolja az i-edik termelő termékét). Mivel minden fogyasztó legalább kétféle terméket fogyaszt, ezért tetszőleges j-re $d_j^C \geq 2$. Ebből pedig az következik, hogy $b_{ij} \leq 1/2$.

Figyelembe véve az észlelt árindex meghatározását, megmutatom, hogy egy átlagról van szó. Utóbbi meglehetősen egyszerűen meggondolható, hiszen

$$\sum_{k=1}^{M} b_{kj} = \frac{1}{d_j^C} \sum_{k=1}^{M} a_{kj} = \frac{1}{d_j^C} d_j^C = 1 \tag{4.4}$$

teljesül. Tehát a j-edik fogyasztó figyelembe veszi mindazon termékek árát, amelyeket fogyaszt, és azokat egyenlő súllyal látja el. E súly nagysága pedig $1/d_j^C$.

Gondolatmenetemet folytatva, számítsuk ki a $\sum_{i=1}^{N} x_{ij}(\mathbf{p})$ egyedi fogyasztások összegét ($j = 1, 2, \ldots, N - M$):

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}(\mathbf{p}) = \gamma_j \sum_{i=1}^{N} b_{ij} + \epsilon \overline{p}_j \sum_{i=1}^{N} b_{ij} - \epsilon \sum_{i=1}^{N} b_{ij} p_i = \gamma_j + \epsilon \overline{p}_j - \epsilon \overline{p}_j = \gamma_j \tag{4.5}$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a j-edik fogyasztó összkereslete (másként, teljes fogyasztása vagy rendelkezésre álló elkölthető jövedelme) konstans. Tehát magának a keresleti függvénynek a viselkedésére nézve is levonható egy érdekes következtetés. Nevezetesen a (4.2) szerinti keresleti függvény egy adott fogyasztó összkeresletének lehetséges felosztását adja meg, hangsúlyozva azt, hogy a fogyasztói összkereslet mindig egy részpiac, egy adott termékkör vonatkozásában értelmezendő.

A (4.2) egyedi keresleti függvényéből származtatott keresett mennyiségre reálváltozóként kell tekinteni, hangsúlyozva, hogy a függvényben szereplő termékárak mindegyike szintén reálértéken szerepel. Mivel minden egyes γ_j is egyértelműen egy reálértéket jelent, ezért az ϵ árérzékenységi paraméter felelős azért, hogy összekapcsolja a termékárakból képzett kifejést a γ_j értékével minden egyes fogyasztó tekintetében.

A (4.5) összefüggésből kiindulva azonnal következik a

$$\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{i=1}^{N} x_{ij}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j \tag{4.6}$$

felírás. Utóbbi értelmezhető úgy mint adott nominális összkeresletnek pénzmennyiséggé történő konvertálása. Ha ezt $\mathcal{M}$ jelöli, akkor elvégezhető az alábbi felbontás:

$$\mathcal{M} = \Pi(\boldsymbol{\wp})\Gamma(\boldsymbol{\gamma}), \tag{4.7}$$

ahol $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{N-M})^{\mathsf{T}}$, a $\Pi(\boldsymbol{\wp})$ tényezőt pedig a teljes modellgazdaság kompozit árindexének hívjuk, feltéve róla, hogy az árak vonatkozásában elsőfokú homogén, valamint egy szereplő kismértékű árváltoztatására a szóban forgó árindex elhanyagolható módon reagál.[15] Amennyiben a kompozit árindex az ármérce szerepét tölti be (tehát $\Pi(\boldsymbol{\wp}) = 1$), akkor $\mathcal{M}$ és $\Gamma(\boldsymbol{\gamma})$ numerikusan egyenlők, azaz $\mathcal{M}/\Pi(\boldsymbol{\wp}) = \Gamma(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j$. Ehhez hozzáfűzhető az a megállapítás, hogy az elemzett modellt – egy másik kutatás keretében – pénzpiaccal bővítve az $\mathcal{M}/\Pi(\boldsymbol{\wp})$ hányados részletei is tisztázhatók lennének.

A megkezdett gondolatmenet lekerekítése előtt szeretnék még néhány kiegészítő megjegyzést tenni az ármérce kapcsán. Amint az alapmodell feltevései és jellegzetességei között említettem, a termelők olyan termékeket állítanak elő, amelyek ugyan nem tökéletesen homogének, helyettesíthetőségük mégis meglehetősen nagyfokú. Itt gondolhatunk például olyan esetre, amikor a fogyasztók vállalatok, a termelők pedig ezek beszállítói egy bizonyos típusú erőforrás vagy alkatrész tekintetében (példának okáért autógyárak gumiabroncs-beszállítói). Ugyan a termékek nagyon hasonlók, mégis mindegyik abroncsnak megvan a maga specifikuma. Egy további példában a termelők lehetnek akár gyógyszeripari vállalatok is, amelyek hasonló hatóanyag-tartalmú gyógyszereket állítanak elő. Ebben az esetben is az egyes készítmények rendelkezhetnek olyan jellegzetességekkel, amelyek megkülönböztetik egyiket a másiktól (ilyenek lehetnek mondjuk bizonyos összetevők, amelyek egyes mellékhatások tekintetében okoznak eltérést). A sort még folytathatnám. Mivel pedig $\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = \gamma_j$ tetszőleges j-re teljesül, ezért ezen összefüggés értelmében az egyes fogyasztók jövedelmüket nagymértékben helyettesíthető termékek között osztják fel. Mindezzel azt kívánom aláhúzni, hogy – részpiacok vizsgálata esetében – a termékárak összehasonlíthatósága érdekében nem feltétlenül szükséges az ármérce explicit bevezetése. E példák segítségével rámutatok arra is, hogy miféle szereplőkre érdemes gondolni a modell relevanciáját illetően.

[15] Fontos hangsúlyozni, hogy $\Pi(\boldsymbol{\wp})$ a teljes gazdaságot, az összes árat figyelembe veszi (melyek vektorát $\boldsymbol{\wp}$ jelöli), vagyis nem csak az általam modellezett piacot.

Az iménti gondolatmenet nyomvonalán haladva vezessük be a

$$x_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{b_{ij}}{\Pi(\boldsymbol{\wp})}\left[\gamma_j - \epsilon\left(p_i - \overline{p}_j\right)\right], \tag{4.8}$$

(átskálázott) keresleti függvényt ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$). Látható, hogy a kompozit árindex arányos növekedése a keresett mennyiség arányos csökkenését vonja maga után. Megjegyezendő, hogy ebben a függvényben az összkereslet és minden egyes termékár nominális értéken szerepelnek. Azonban ezek $1/\Pi(\boldsymbol{\wp})$-szerese már a reálértéket adja meg.

A (4.8) összefüggést alkalmazva $\sum_{i=1}^{M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \gamma_j/\Pi(\boldsymbol{\wp})$ fennáll, így $\Pi(\boldsymbol{\wp})\sum_{i=1}^{M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \gamma_j$ szintén teljesül. Összegezve az összes j-re a $\Pi(\boldsymbol{\wp})\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{i=1}^{M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \Pi(\boldsymbol{\wp})\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j$ eredmény adódik. Ha ezután a $\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j$ összeget $\Gamma(\boldsymbol{\gamma})$ jelöli, akkor a (4.7) egyenlethez jutunk. Mivel $\Pi(\boldsymbol{\wp}) = 1$, emiatt formailag az eredeti (4.2) keresleti függvényt függvényhez jutunk vissza. Mindez úgy is megfogalmazható, hogy a nominális és reálértékek numerikusan egyenlők lesznek. Reálmodellt vizsgálok tehát, amelyben a termékárak a kompozit árindexhez viszonyított reálárak. A további elemzést e megjegyzések alapvetően nem befolyásolják, amire a megfelelő helyen még röviden visszatérek.

A gyakorlati szempontból vizsgált esetekben (illusztrációk, szimulációk, kalibráció) figyelmen kívül hagyom azokat a szcenáriókat a (4.2) keresleti függvényt illetően, amelyekben:

1. $\epsilon \to 0$, azaz a termékeket fogyasztók érzéketlenek a relatív árváltozásra (másként mondva fogyasztásuk konstans);

2. $\epsilon \to \infty$, azaz a termékeket fogyasztók „végtelenül” érzékenyek a relatív árváltozásra (ekkor az egyedi kereslet értelmezhetetlen);

3. adott fogyasztó által fogyasztott termékváltozatok száma minden határon túl növekszik (ez azonban burkoltan feltételezi a termelők számának minden határon túli növekedését is).

Elméleti szempontból az említett esetek közül az $\epsilon \to \infty$ határhelyzetet tartom különösen is érdekesnek.

Következésképpen a (4.2) szerinti keresleti függvény biztosan nem alkalmas szélsőséges piaci viszonyok leírására, például mint a tökéletesen versenyző piac. Az említett tulajdonságok mellett emlékeztetni szeretnénk arra, hogy fentebb szerepelt már egy korlátozás, amely a monopóliumok modellezését zárja ki. Újra hangsúlyozom, hogy monovagy oligopolisztikus körülményeket fogok vizsgálni, tehát megállapításaimat ezt szem előtt tartva kell értékelni.

Ezen a ponton a teljesebb összkép érdekében visszautalok az alapmodell sajátosságai közül arra, hogy a fogyasztók nem szembesülnek likviditási problémákkal. Ez fontos feltétel ahhoz, hogy a fogyasztók zökkenőmentesen képesek legyenek interakcióban maradni azokkal a termelőkkel, akiktől az **A** kapcsolati mátrix alapján vásárolnak. Az alapmodellnek ugyan nem célja részletesebben foglalkozni a fogyasztók jövedelmi viszonyaival, mégis fontosnak tartottam élni ezzel a megjegyzéssel.

Mielőtt az alapmodell határait kijelölő további feltevéseket ismertetném, vizsgáljuk még kicsit meg az árváltoztatásra adott reakciót a (4.2) egyenlet alapján. Határozzuk meg a $\partial x_{ij}/\partial p_i$ parciális deriváltat annak érdekében, hogy pontosabban lássuk a keresleti függvény viselkedését ($a_{ij} = 1$). Gyakorlatilag arra vagyok kíváncsi, hogy mennyivel változik j-nek az i-edik szereplő termékével szembeni kereslete, ha utóbbi egy egységgel növeli az árat. Ezután

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial p_i} = -\epsilon b_{ij}(1 - b_{ij}), i = 1, 2, \ldots, M, j = 1, 2, \ldots, N - M \tag{4.9}$$

Mivel $0 \leq b_{ij} \leq 1$, ezért az iménti parciális derivált sosem pozitív. Az egyes termékekkel szembeni árérzékenység függ tehát a kapcsolatrendszert leíró hálózat szerkezetétől. Egyszerű látni, hogy a minimum hely $b_{ij} = 1/2$-nél van, mivel (4.9) b_{ij}-ben másodfokú. Vagyis ebben az esetben a legnagyobb az árérzékenység. Ez akkor valósulhat meg, ha $d_j^C = 2$, tehát a j-edik szereplő pontosan két terméket fogyaszt. Ez azt mutatja, hogy ha a hálózat sűrűbbé válik, tehát d_j^C jellemzően növekszik, akkor az árérzékenység csökken.

Ezek után értelmezzük közgazdaságtanilag azt, hogy a legnagyobb árérzékenység miért azoknál a szereplőknél tapasztalható, amelyek pontosan két terméket fogyasztanak. Ennek oka kettős. Egyrészt az összkereslet állandó, másrészt, mivel a szóban forgó szereplők teljes fogyasztása két termék között oszlik meg, ezért ebben az esetben jelentkezik a legnagyobb keresletcsökkenés egy adott termékkel szemben, ha annak ára növekszik. Ha a fogyasztott termékszám $d_j^C > 2$, akkor az állandó összkereslet már több termék között oszlik meg, így egy termék árnövekedése kisebb árérzékenységgel jár együtt. Az elmondottakat kiegészítendő, ha a szereplők monopolereje csökken, vagyis a termékhelyettesítés mértéke növekszik, akkor az árérzékenység is logikusan növekszik. Utóbbi annak köszönhető, hogy a termékek egyre inkább homogének lesznek. Tehát a (4.2) egyenlet által definiált keresleti függvény valóban monopolisztikus szituációt tükröz.

A $\partial x_{ij}/\partial p_k$ parciális deriváltat is vezessük le. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial x_{ij}}{\partial p_k} = \epsilon b_{ij} b_{kj} \tag{4.10}$$

Tehát, ha a j-edik fogyasztó nem vásárolja az i-edik vagy a k-adik termelő termékét, akkor e parciális derivált zérus. Következésképpen a k-adik termelő árváltoztatása nem

befolyásolja az $x_{ij}(\mathbf{p})$ fogyasztás nagyságát. Az is látható, hogy amennyiben a_{ij} és a_{kj} egyike sem nulla, akkor a j-edik fogyasztó által fogyasztott termékvariánsok számának növekedése a parciális derivált értékének csökkenését eredményezi. Másként mondva: a fogyasztott termékvariánsok számának emelkedése az árváltoztatással szembeni reakció mértékét csökkenti abban az esetben, ha az i-edik termelőtől különböző k-adik termelő változtat árat.

Ezek után kézenfekvő lépésnek – és az eddigiekkel összhangban lévőnek – tűnhet az $\varepsilon^i_{ij}(\mathbf{p})$ saját-árrugalmasság meghatározása abban az esetben, ha $x_{ij}(\mathbf{p}) > 0$. A kalkuláció az alábbi eredményre vezet:

$$\varepsilon^i_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{\partial x_{ij}}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_{ij}(\mathbf{p})} = -\frac{\epsilon b_{ij}(1-b_{ij})p_i}{x_{ij}(\mathbf{p})} \tag{4.11}$$

Az így meghatározott árrugalmasság tekintetében vonjuk le a legalapvetőbb következtetéseket. Ennél többet jelen helyzetben nem is lehet elvárni, hiszen nem ismert, hogy az árvektor miként viselkedik (ha egyáltalán létezik). Az említettek érdekében átírom a kifejezés jobb oldalát:

$$\varepsilon^i_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{\partial x_{ij}}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_{ij}(\mathbf{p})} = -\frac{\epsilon(1-b_{ij})p_i}{\gamma_j - \epsilon\left(p_i - \overline{p}_j\right)} \tag{4.12}$$

Látható, hogy az árrugalmasság alakulása biztosan függ b_{ij}-től. Ezenkívül megjegyzendő, hogy az árrugalmasság értéke negatív, tehát az i-edik termék árának növekedése a vele szembeni kereslet csökkenését eredményezi.

Az előbbiek természetes folytatásaként úgyszintén nézzük meg az $\varepsilon^k_{ij}(\mathbf{p})$ keresztárrugalmasságot abban az esetben, ha a j-edik fogyasztó vásárol az i-edik és k-adik termelőtől is ($i \neq k$). Számolás után kijön, hogy

$$\varepsilon^k_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{\partial x_{ij}}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_{ij}(\mathbf{p})} = \frac{\epsilon b_{ij} b_{kj} p_k}{x_{ij}(\mathbf{p})} \tag{4.13}$$

Behelyettesítve az egyedi kereslet helyére a (4.2) alapján, továbbá élve az $x_{ij}(\mathbf{p}) > 0$ feltételezéssel, a következő egyenletet kapom:

$$\varepsilon^k_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{\epsilon b_{kj} p_k}{\gamma_j - \epsilon\left(p_i - \overline{p}_j\right)} \tag{4.14}$$

Látható, hogy az árrugalmasság zérus, ha $a_{kj} = 0$. Továbbá annak értéke pozitív, tehát a k-adik termék árának növekedése – nem meglepő módon – az i-edik termékkel szembeni kereslet növekedéséhez vezet.

Az alapmodellt jellemző kulcsfontosságú tulajdonságok számbavételekor feltételeztem

a piactisztítást. Eszerint jól informált termelők pontosan annyit termelnek, amennyi a saját termékükkel szemben támasztott kereslet. A következőt írhatjuk tehát ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$y_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij}(\mathbf{p}) \tag{4.15}$$

Ezen a ponton fontosnak tartom kiemelni, miszerint olyan piacszerkezeti modellt vizsgálok, amelyben a monetáris szempontokat ugyan nem hangsúlyozom, mindebből viszont nem szabad arra következtetni, hogy a kibocsátás természetes mértékegységekben fejeződik ki. A leírtak vonatkozásában megjegyzem, hogy a közgazdaságtanban standardnak számító, de monetáris aspektussal nem rendelkező RBC-modellben sem jelent problémát aggregált kibocsátásról beszélni. Mindezen túl figyelembe veendő az is, hogy a disszertációban szereplő modell alapvetően nagyfokú helyettesíthetőséget feltételez az egyes termékek szempontjából, így meglátásom szerint abban az esetben sem adódna különösebb nehézség, ha a kibocsátásokat természetes mértékegységekben mérnénk.

Másrészt termelési oldalról feltételezem, hogy egy lineáris termelési függvény szerint történik a termék-előállítás, és pontosan a keresett mennyiséget állítja elő minden egyes termelő ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$y_i(\mathbf{p}) = \alpha h_i, \tag{4.16}$$

ahol $\alpha > 0$ a munka termelékenységi (vagy a munkaidő hatékony felhasználásának) paramétere, $h_i \geq 0$ pedig a termelés során felhasznált munkaidő. Látható, hogy a munkatermelékenység pozitív, vagyis, ha a termelő rendelkezik humánerőforrással, akkor az időegység alatt előállított termékmennyiség nem lehet zérus. Ezenkívül a termelési függvény linearitásából rögtön következi, hogy az első fokon homogén (hasonlóan más, a közgazdasági szakirodalomban jól ismert termelési függvényhez). E ponton szintén röviden visszautalok az alapmodell jellegzetességei közül arra, hogy a termelés során nem lépnek fel erőforráshiányból eredő zavarok. Ez azt jelenti, hogy a termelők képesek a rendelkezésre álló munkaerő segítségével kielégíteni a velük szemben támasztott keresletet.

Összhangban a korábbiakkal felteszem, hogy minden termelő egységesen $\omega > 0$ munkabért fizet és nincsenek egyéb költségei. Ekkor az i-edik termelő nyereségfüggvénye ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i(\mathbf{p}) - \omega h_i \tag{4.17}$$

Ez (4.16) felhasználásával az alábbi módon írható át:

$$\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i(\mathbf{p}) - \frac{\omega}{\alpha} y_i(\mathbf{p}) = \left(p_i - \frac{\omega}{\alpha}\right) y_i(\mathbf{p}) \tag{4.18}$$

Megjegyzem, hogy a (4.17) képletben a munkabér reálbér, hiszen a termékár reálár.

Az előbbi érték a termékárhoz hasonlóan a kompozit árindex viszonylatában értelmezett. A $\Pi(\wp) = 1$ helyettesítés miatt ω ekvivalens lesz a reálbérrel, amit adottnak tekintek, ugyanis az alapmodell keretein túlmutat a munkapiaccal való kibővítés és a bérek endogenizálása.

Mielőtt a termelői problémára illetve ennek természetes módszertani folyományaként az egyensúlyi árvektor egzisztenciájának és unicitásának bizonyítására térnék át, a korábbiak egyfajta általánosításaként, nem utolsósorban pedig összegzéseként bevezetem az alábbi fogalmat:

4.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $\mathcal{X} = \{x_{ij}(\mathbf{p})\}_{i=1,2,\ldots,M,j=1,2,\ldots,N-M}$, $\mathcal{Y} = \{y_i(\mathbf{p})\}_{i=1,2,\ldots,M}$ és $\mathcal{P} = \{\pi_i(\mathbf{p})\}_{i=1,2,\ldots,M}$. Ekkor az

$$\mathfrak{M} = \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{P} \rangle \tag{4.19}$$

struktúrát *absztrakt piacszerkezetnek* nevezzük, ha teljesülnek még a következők:

$$p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.20a}$$

$$x_{ij}(\mathbf{p}) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, M, j = 1, 2, \ldots, N - M \tag{4.20b}$$

$$y_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij}(\mathbf{p}) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.20c}$$

Következésképpen az imént definiált absztrakt piacszerkezet nem más, mint az egyes fogyasztások, kibocsátások és nyereségek gyűjteménye. Vagyis az absztrakt piacszerkezet magában foglalja a fogyasztók döntési szabályait (annak minden paraméterével együtt), a termelők döntési szabályait (szintén azok összes paraméterével együtt), valamint a termelői nyereségfüggvényeket.

Ezenkívül definiálok még egy tiszta stratégián alapuló játékot is, méghozzá annak normálformájával. Ebben a játékban az egyes játékosok a termelők lesznek, így ezeknek a halmazát az egyszerűség kedvéért az $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, M\}$ indexhalmazzal azonosítjuk. Az i-edik termelő stratégiahalmaza $A_i = [0, \infty]$, és ez azt jelenti, hogy e termelő bármilyen nemnegatív árat megszabhat. Az A_i halmaz elemeit eddigiekkel összhangban p_i jelöli. Tehát a $\mathbf{p} \in \mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i$ vektor egy stratégia- vagy akcióprofilt jelent. Bevezetem továbbá az $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}$ tiszta stratégiahalmazok halmazát. Mindezek után már definiálható a játék normálformája:

4.2. Definíció. A fentiekre tekintettel, az alapmodell tiszta stratégián alapuló játék normálformájának a

$$\mathfrak{G} = \langle \mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle \tag{4.21}$$

absztrakt matematikai struktúrát nevezzük.

Ezt a definíciót figyelembe véve igazolni szeretném egy olyan $\mathbf{p}$ árvektor létezését és egyértelműségét, amely teljesíti, hogy

$$\pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i(\hat{p}_i, \mathbf{p}_{-i}), i = 1, 2, \ldots, M, \tag{4.22}$$

ahol $\mathbf{p}_{-i} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_M)^\mathsf{T}$, továbbá $\hat{p}_i \in A_i$ tetszőleges termékár. Ez pedig azt vonja maga után, hogy tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly létezését és egyértelműségét kell belátni.

Következésképpen, ha igazolást nyer, hogy létezik az említett Nash-egyensúly, akkor egyetlen termelőnek sem áll érdekében egyoldalúan stratégiát változtatni (értsd, termékárat módosítani). Ekkor ugyanis az adott termelő kifizetőfüggvénye biztosan nem növekszik. A modellben tehát egy együttműködésmentes játékelméleti kérdést vizsgálok, így a szereplők lehetséges kooperációjától eltekintek. Pontosabban mondva, a modell mindenféle együttműködést kizár a termelők között, ami egy további lehatárolást jelent annak érvényességi területét illetően. Egyben viszont megnyitja annak a lehetőségnek az útját, amely tovább vezethet az együttműködést tartalmazó vizsgálódások irányába.

Az alfejezet zárásaként újfent hangsúlyozom, hogy ugyan explicit módon nincs pénzpiac az alapmodellben, annak implicit kontextusát mégis egy valódi gazdasági keretrendszer adja. Vagyis az alapmodell nem vállalkozik teljeskörűségre (ez nem is lehet célja vizsgálódásomnak), hanem jóval inkább egy kutatás kezdeti szakaszának tekinthető. Leglényegesebb törekvése pusztán annyi, hogy a mögöttes hálózati szerkezetet figyelembe véve a heterogenitás lehetőségét és okait elemezze, úgy az árak, mint a kibocsátások tekintetében. Mindehhez megjegyzem, hogy léteznek olyan sokszereplős/soktermékes piacszerkezeti modellek, amelyekben szintén nem szerepel monetáris dimenzió. Ilyen elméleti konstrukcióra kiváló példa a disszertáció 3.2. szakaszából az, amelyik Ushchev és Zenou (2016, 2018) dolgozatában található. E munkában a termékdifferenciálást végző, monopolisztikusan versenyző szereplők olyan modelljével találkozunk, amelyben a szerzők az egyensúlyi ár- és kibocsátásvektort igyekeznek meghatározni és összefüggésbe hozni a hálózati szerkezettel, anélkül, hogy eközben bármiféle ármércére utalás történne. Vagyis megfelelő kontextusban vizsgálva az eredményeket, azok értelmezhetőek az ármérce explicit bevezetése nélkül.

4.2. Termelői egyensúlyi árak létezése és egyértelműsége

A továbbiakban azt a kérdést elemezem, hogy az egyes szereplők milyen feltételek mellett képesek egyensúlyi árat szabni a már definiált egyensúly-koncepció kereti között mozogva. A probléma nem tűnik magától értetődőnek, hiszen olyan struktúrával van dol-

gunk, amely nem feltétlenül szimmetrikus. Így a szereplők egymásra gyakorolt hatásának eredője a legkevésbé sem nyilvánvaló.

Mindezeket figyelembe véve felírom azt a vizsgálni kívánt feladatot, amelyek az iménti felvetés kiindulópontjául szolgál. Belátom, hogy ez a feladat valóban a (4.22) adekvát megoldását és csak azt adja meg, majd ezt követően bizonyítom az egyensúlyi árvektor létezését és egyértelműségét.

Mivel feltettem, hogy az egyes termelők döntési változója saját termékük ára, valamint az árváltoztatásuk nem gyakorol hatást a többi termékárra, ezért az egyensúlyi ár meghatározásához az i-edik szereplőnek meg kell oldania a

$$\pi_i^{BR}(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \arg\max_{p_i \in A_i} \pi_i(\mathbf{p}), i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.23}$$

problémát. Világos tehát, hogy ebben a feladatban p_i az egyetlen változó, azaz a többi termelő termékára rögzített. Alapvetően ezt tekinthető az alapmodell referenciapontjának.

A $\pi_i^{BR}(\mathbf{p})$ az i-edik termelő legjobb-válasza (lásd jobb felső index). Utóbbi könnyen belátható, mert

$$\pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) = \pi_i^{BR}(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i(\hat{p}_i, \mathbf{p}_{-i}), i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.24}$$

teljesül tetszőleges rögzített $\mathbf{p}_{-i}$-re.

Innen pedig következik, hogy amennyiben (4.23) szimultán megoldható minden termelőt illetően, akkor egy tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyt kapunk. Következésképpen a (4.23) feladat valóban a (4.22) megoldását adja – és csak azt. Meghatároztam tehát a megoldandó problémát, és beláttam, hogy az valóban tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyt eredményez – amennyiben megoldható.

Az elsőrendű szükséges feltételrendszert a következő egyenletrendszer adja meg:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= y_1 + \left(p_1 - \frac{\omega}{\alpha}\right)\frac{\partial y_1}{\partial p_1} = 0 \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} &= y_2 + \left(p_2 - \frac{\omega}{\alpha}\right)\frac{\partial y_2}{\partial p_2} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \pi_M}{\partial p_M} &= y_M + \left(p_M - \frac{\omega}{\alpha}\right)\frac{\partial y_M}{\partial p_M} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Mivel egyenletrendszerről van szó, olyan $\mathbf{p}$ vektort kell találnunk, amely szimultán kielégíti minden egyes feltételt. Mivel a megoldás létezése az egyenletrendszer jelenlegi

szerkezetéből még nem látható, további elemzéseket végzek. Megjegyzem, hogy a megoldás (amennyiben van) nem biztos, hogy egyben megoldása lesz a (4.23) feladatnak is, azonban ha utóbbinak van megoldása, az biztosan a stacionárius pontok közül kerül ki. Tehát vizsgálódásomnak elválaszthatatlan részét képezi a másodrendű feltételek felírása, persze csak abban az esetben, ha található stacionárius pont. Mindezt elvégezve kapunk csak egy teljes elemzést az egyensúlyi árvektor szempontjából.

E helyütt röviden visszatérek arra az esetre, amikor a keresleti függvényt (4.8) formula szerint értelmezem. Kétségtelen, hogy ekkor a nyereségfüggvény felírása is megváltozik ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\pi_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{\Pi(\boldsymbol{\varphi})}\left(p_i - \frac{\omega}{\alpha}\right) y_i(\mathbf{p}) \tag{4.26}$$

A szóban forgó függvény p_i-szerinti parciális deriváltja az alábbi lesz ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{1}{\Pi}\left[y_i + \left(p_i - \frac{\omega}{\alpha}\right)\frac{\partial y_i}{\partial p_i}\right] - \frac{1}{\Pi^2}\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}\left(p_i - \frac{\omega}{\alpha}\right) y_i(\mathbf{p}) \tag{4.27}$$

Tekintve, hogy $\partial\Pi/\partial p_i$ elhanyagolható, elegendő csak az egyenlőség jobb oldalának első tagjával foglalkozni. A fenti deriváltat nullával egyenlő téve, majd ezt kompozit árindexszel beszorozva lényegében a (4.25) egyenletrendszer i-edik egyenlete adódik. Tehát az elemzés alapvetően nem módosulna a (4.8) keresleti függvény mellett sem.

Az iménti kitérő után egy újabb, méghozzá interpretatív jellegű megjegyzést teszek. Nevezetesen arra szeretnék rámutatni, hogy alapmodellben vizsgált szituációt értelmezhetjük úgy közgazdaságtanilag, hogy a termelők egyidejűleg próbálják meg beállítani egyensúlyi áraikat (egyszerre lépnek). Vagyis senkinek sem lesz információtöbblete a másik döntésére nézve, mert semmiféle szekvencialitás, késleltetett lépés nem jelenik meg az alapmodellben. Ez viszont azt sejteti, hogy amennyiben ezt képesek megtenni, akkor pont az egyidejűség miatt az egyensúlyi termékár nem függhet a többiek egyensúlyi áraitól, hanem sokkal inkább attól, hogy melyik termelőtől melyik fogyasztók vásárolnak illetve a modell szempontjából releváns paraméterértékektől. Az itt leírtak ugyan még csak egyfajta sejtésként fogalmazódtak meg, mindazonáltal az alábbiakban világos explicit formában igazolva is lesznek.

A (4.25) elsőrendű feltételrendszerrel i-edik egyenletével egyenértékű, a továbbiakban használt felírás ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j + \epsilon\left[\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{k=1}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k - p_i\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} - p_i\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})\right] \\ &+ \frac{\epsilon\omega}{\alpha}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = 0\end{aligned} \tag{4.28}$$

Ezt a felírás úgy kapható meg, hogy az előző alfejezet definícióit, eredményeit figyelembe véve egyrészt tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N-M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left[\gamma_j - \epsilon\left(p_i - \overline{p}_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j - \epsilon p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} \\ + \epsilon \sum_{j=1}^{N-M}\sum_{k=1}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k, \end{aligned} \tag{4.29}$$

másrészt további számításokat végezve, a

$$\frac{\partial \overline{p}_j}{\partial p_i} = b_{ij}, \tag{4.30}$$

parciális derivált alapján meghatározható a

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_i} = -\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}) \tag{4.31}$$

parciális derivált, amely (4.28) egyenletben szintén szerepel.

Ezt felhasználva belátom, hogy az elsőrendű feltételrendszert tömörítő mátrixegyenlet:

$$\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} + \epsilon(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} - \widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C})\mathbf{p} + \frac{\epsilon\omega}{\alpha}\mathbf{C}\mathbf{1}_M = \mathbf{0}_M, \tag{4.32}$$

ahol $\mathbf{G}$ egy $(N-M)\times(N-M)$-es diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme γ_i; $\widetilde{\mathbf{B}}$ egy olyan $M \times M$-es diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}$; $\mathbf{C}$ egy olyan szintén $M \times M$-es diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$, illetve $\mathbf{1}_{N-M}$ és $\mathbf{1}_M$ egy $(N-M)\times 1$-es, valamint $M \times 1$-es méretű, csupa egyesből álló összegzővektor.

4.1. Tétel. *A* (4.28) *által megfogalmazott elsőrendű feltételekből álló egyenletrendszer a* (4.32) *szerinti alakba átírható. Ezenkívül, ha* $\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ *és* $\mathbf{c} = (1/\epsilon)\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} + (\omega/\alpha)\mathbf{C}\mathbf{1}_M$*, akkor a* (4.32) *így is felírható:*

$$\mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{c} \tag{4.33}$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges i-re és j-re teljesül, hogy $\mathbf{e}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{N-M} b_{ik}\mathbf{e}_k^{\mathsf{T}}$, illetve $\mathbf{e}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \sum_{m=1}^{M} b_{mj}\mathbf{e}_m^{\mathsf{T}}$, ahol $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ rendre az i-edik és j-edik természetes $(N-M)\times 1$-es és $M \times 1$-es bázisvektor, ezért egyszerűen ellenőrizhető, hogy igazak a következő összefüggések:

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\mathbf{e}_j^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{1}_{N-M} = \mathbf{e}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\mathbf{1}_{N-M} \tag{4.34a}$$

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j = \left(\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\mathbf{e}_j^\top\right)\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} = \mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} \tag{4.34b}$$

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}^2 = \left(\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\mathbf{e}_j^\top\right)\left(\sum_{k=1}^{N-M} b_{ik}\mathbf{e}_k\right) = \mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i \tag{4.34c}$$

$$\overline{p}_j = \left(\sum_{k=1}^{M} b_{kj}\mathbf{e}_k^\top\right)\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{M} b_{kj}p_k = \mathbf{e}_j^\top\mathbf{B}^\top\mathbf{p} \tag{4.34d}$$

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\overline{p}_j = \left(\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\mathbf{e}_j^\top\right)\mathbf{B}^\top\mathbf{p} = \mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\mathbf{B}^\top\mathbf{p} \tag{4.34e}$$

Ezeket felhasználva felírható, hogy

$$\begin{aligned} y_i(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j - \epsilon p_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} + \epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\overline{p}_j \\ &= \mathbf{e}_i^T\mathbf{B}\left(\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} - \epsilon p_i\mathbf{1}_{N-M} + \epsilon\mathbf{B}^\top\mathbf{p}\right) \end{aligned} \tag{4.35a}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_i} = -\epsilon\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = -\epsilon\mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\left(\mathbf{1}_{N-M} - \mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i\right) \tag{4.35b}$$

A (4.28) egyenletből a $\partial\pi_i/\partial p_i$ parciális deriváltra kapott kifejezést, továbbá a (4.35a)–(4.35b) összefüggéseket felhasználva az alábbit kapjuk:

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial p_i} = \mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\left(\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} - \epsilon p_i\mathbf{1}_{N-M} + \epsilon\mathbf{B}^\top\mathbf{p}\right) - \epsilon\left(p_i - \frac{\omega}{\alpha}\right)\mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}(\mathbf{1}_{N-M} - \mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i) \tag{4.36}$$

Amennyiben a (4.28) elsőrendű feltételt felírjuk, akkor (4.36) segítségével megfelelő átrendezést követően kijön, hogy

$$\mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\left[\left(2\mathbf{1}_{N-M} - \mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i\right)p_i - \mathbf{B}^\top\mathbf{p}\right] = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} + \frac{\omega}{\alpha}\mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}(\mathbf{1}_{N-M} - \mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i) \tag{4.37}$$

Ez az egyenlet $\mathbf{p}$-ben lineáris, ahol $\mathbf{p}$ együtthatója:

$$\mathbf{e}_i^\top\mathbf{B}\left[\left(2\mathbf{1}_{N-M} - \mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i\right)\mathbf{e}_i^\top - \mathbf{B}^\top\right] = \mathbf{e}_i^\top\left(2\mathbf{B}\mathbf{1}_{N-M}\mathbf{e}_i^\top - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^\top - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top\right), \tag{4.38}$$

felhasználva, hogy $\mathbf{e}_i^\top\mathbf{p} = p_i$.

Ha (4.37) egyenletet minden i-re tekintem, akkor egy olyan $\mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{c}$ mátrixegyenlethez jutok, amelynek együtthatómátrixa az a mátrix, amelynek i-edik sora a (4.38) sorvektor. Ez a $\mathbf{Q}$ mátrix explicit alakban is kifejezhető, ha a (4.38) sorvektort visszaírom koordiná-

tás alakba. Ugyanis igaz, hogy

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{1}_{N-M}\mathbf{e}_i^\mathsf{T} = \left[0,\ldots,0,\textstyle\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij},0,\ldots,0\right] = \mathbf{e}_i^\mathsf{T}\widetilde{\mathbf{B}} \tag{4.39a}$$

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{1}_{N-M}\mathbf{e}_i^\mathsf{T} - \mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^\mathsf{T} = \left[0,\ldots,0,\textstyle\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}),0,\ldots,0\right] = \mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{C}, \tag{4.39b}$$

hiszen az egyes vektorokban a $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}$, illetve $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})$ elemek a megfelelő vektorok i-edik koordinátái.

Ebből a gondolatmenetből azonban világos, hogy a $\mathbf{Q}$ mátrix felírható úgy, mint

$$\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T} \tag{4.40}$$

A (4.37) egyenletből továbbá azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{1}_{N-M} + \frac{\omega}{\alpha}\mathbf{C}\mathbf{1}_M \tag{4.41}$$

Ezzel beláttuk a tételt. ■

Ha $\mathbf{Q}$ invertálható, akkor $\mathbf{p}$ árvektor egyértelműen meghatározott:[16]

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} \tag{4.42}$$

Annak érdekében, hogy az invertálás kérdésének megoldásához közelebb jussunk olyan feltételt igyekszem találni, amelynek teljesülése esetén a szóban forgó inverz létezik. Ennek során felhasználom a szakirodalmi áttekintés során már előhozott Gerschgorin-tétel következményét. Nevezetesen, amennyiben egy mátrix főátlójában álló minden elem abszolútértéke szigorúan nagyobb az adott elem sorában, a főátlón kívül álló elemek abszolútértékeinek összegénél (ez az irodalmi összefoglalóban előkerült diagonális dominancia), akkor a mátrix reguláris. Ha tehát a $\mathbf{Q}$ mátrix i-edik sorának k-adik eleme q_{ik}, akkor az előbbi verbálisan megfogalmazott állítás formálisan azt jelenti, hogy $|q_{ii}| > \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} |q_{ik}|$. Ez utóbbi feltétel a következő konkrét egyenlőtlenség teljesülését követeli meg:

$$2\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) > \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj} \tag{4.43}$$

[16] Az árvektor képletéből látható, hogy ha ϵ csökken, akkor az egyes termékárak növekszenek. Ezért – visszautalva a korábbiakra – az $1/\epsilon$ hányados valóban összefüggésbe hozható a monopolerővel.

Az egyenlőtlenség jobb oldala egyszerűen átírható:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj} &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}}{d_j^C}\frac{a_{kj}}{d_j^C} = \sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}}{(d_j^C)^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} a_{kj} = \sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{M} a_{kj} - a_{ij}\right)}{(d_j^C)^2}\\ &= \sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}(d_j^C - a_{ij})}{(d_j^C)^2} = \sum_{j=1}^{N-M}\frac{a_{ij}}{d_j^C}\left(1-\frac{a_{ij}}{d_j^C}\right) = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})\end{aligned} \tag{4.44}$$

Innen pedig következik, hogy elegendő megkövetelni az

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) > 0 \tag{4.45}$$

egyenlőtlenség fennállását valamennyi i-re.[17] Az egyenlőtlenség teljesül, ha van olyan b_{ij} adott i termelő esetén, amelyik nullától és egytől különbözik – azaz minden i-re van legalább egy olyan j, hogy $b_{ij}(1-b_{ij}) > 0$ teljesül. Tehát $\mathbf{B}$-nek olyannak kell lennie, hogy minden sorában lennie kell legalább egy nullától és egytől különböző értéknek. Ez pontosan akkor lesz igaz, ha minden termelő esetében van olyan fogyasztó, amely legalább kétféle terméket fogyaszt. E feltétel teljesülése mellett a vizsgált mátrix kétséget kizáróan invertálható. Ugyanis, ha a fenti szorzatösszeg pozitív, akkor ez azt jelenti, hogy van benne olyan tényező, ami nem zérus. Ekkor viszont biztosan kell legyen olyan j fogyasztó minden egyes i termelőt figyelembe véve, amely fogyasztóra teljesül, hogy $d_j^C \geq 2$. Másrészt, ha minden i termelő esetén garantáltan található olyan j fogyasztó, hogy $d_j^C \geq 2$, akkor a szóban forgó szorzatösszeg biztosan pozitív. Tehát $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz létezése szempontjából a fogyasztási oldalra kaptunk egy korlátozást.

E megkötés közgazdaságilag úgy értelmezhető, hogy az egyensúlyi árvektor biztosan létezik egy a modellben használt interakciós struktúrát alapul véve, ha minden termelő a saját árdöntéséhez figyelembe tud venni legalább még egy termelői árat (összhangban a modellt lehatároló feltételrendszerrel, a termelők csak a tőlük fogyasztókkal közvetlenül kapcsolatban álló más termelők árait veszik figyelembe, így a szereplők informáltsága nem minden változó [jelen esetben az összes termékár] ismeretére terjed ki). Az ármeghatározás tehát nem igényel egy teljes hálózatot (gráfot), szorítkozhatunk mindössze az összefüggőségre. Az bőven elegendő, ha tetszőleges termelőt el tudunk érni bármely termelőből, mint hálózati csúcsból indulva olyan módon, hogy közben a szóban forgó út fogyasztókon halad keresztül. Az összefüggő hálózati struktúra közgazdaságilag úgy értelmezhető, hogy az egyes termelőknek közvetlenül vagy közvetve (más termelők termékárain keresztül) van információjuk a fogyasztók árérzékeléséről. Megjegyzem, hogy

[17] Megjegyzem, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összeg a $\widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ mátrix főátlójának i-edik eleme. Ez pedig azt kell jelentse, hogy $\widetilde{\mathbf{B}} \neq \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$.

a $d_j^C \geq 2$ egyenlőtlenség definíció szerint minden j-re teljesül.

Az iménti gondolatmenet azonban még korántsem teljes. Ahhoz ugyanis, hogy $\mathbf{p}$ közgazdaságilag eleget tegyen az absztrakt piacszerkezet (4.20a) feltételének, a vektor minden koordinátája nemnegatív kell, hogy legyen. Ennek igazolásához nézzük a

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_M - \kappa\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{\kappa}(\mathbf{I}_M - \mathbf{V}) \tag{4.46}$$

mátrixot, ahol $0 < \kappa \leq 2/(N-M)$ egy (skálázó) konstans, $\mathbf{I}_M$ egy $M \times M$-es egységmátrixot jelöl.[18] Ha teljesülne az $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$ egyenlőtlenség, akkor $\mathbf{Q}^{-1} = \kappa(\mathbf{I}_M - \mathbf{V})^{-1} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}^n$ lenne írható ($\mathbf{V}^0 = \mathbf{I}_M$). Emellett, ha még az is igazolható, hogy a $\mathbf{V}$ minden eleme nemnegatív, akkor $\mathbf{Q}^{-1}$ elemei is biztosan nemnegatívak, tehát $\mathbf{p} \geq 0$ (sőt $\mathbf{p} > 0$, mert a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrixnak nem lehet csupa nullából álló sora).

Megjegyzem, hogy az imént megfogalmazott állítás annak a folyománya, hogy ha $\mathbf{V}$ sajátértékei a komplex egységnyi sugarú körön belül vannak, akkor a szóban forgó végtelen sorfelírás létezik. Mivel pedig $\rho(\mathbf{V}) \leq \|\mathbf{V}\|_\infty$ mindig teljesül, ezért, ha $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$ igaz, akkor ez már garantálja a fenti végtelen sor konvergenciáját, ahol $\rho(\mathbf{V})$ a $\mathbf{V}$ mátrix spektrálsugara.

Elsőként megvizsgálom $\mathbf{V}$ főátlóbeli elemeinek abszolútértékét illetve egy adott főátlóbeli elemmel azonos sorban álló főátlón kívüli elemek abszolútértékeinek összegét. E mátrix i-edik főátlóbeli elemének abszolútértékére tejesül, hogy

$$\left|\kappa\left[\sum_{j=1}^{N-M} b_{i,j}^2 + \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(b_{ij}-1) - \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\right] + 1\right| \leq 1 - 2\kappa \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}), \tag{4.47}$$

ugyanis $-1/4 \leq b_{ij}(b_{ij}-1) \leq 0$ minden i-re. A főátlón kívüli elemek abszolútértékeinek összegére pedig igaz, hogy

$$\kappa \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj} = \kappa \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) \tag{4.48}$$

Ebből következik, hogy $\|\mathbf{V}\|_\infty < 1$, továbbá κ értékének megfelelő választása mellett az is teljesül, hogy $\mathbf{V}$ elemei nemnegatívak illetve a főátlóbeli elemei pozitívak. Ezzel beláttuk, hogy az egyensúlyi árvektor eleget tesz a (4.20a) feltételnek, sőt egyetlen koordinátája sem zérus.

Felhívom a figyelmet arra, hogy $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz elemeinek nemnegativitása más módon is

[18] Látható, hogy $\mathbf{V}$ függ κ nagyságától, azaz eltérő κ eltérő $\mathbf{V}$ mátrixot eredményez. Ezt azonban a jelölés szintjén különösebben nem hangsúlyozom.

belátható. A binomiális invertálás tételét (lásd Press 2005) alkalmazva:

$$\left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right]^{n} \left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1} \tag{4.49}$$

Mivel $\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}$ mátrixának inverze egy olyan diagonális mátrix, amelynek i-edik főátlóbeli eleme a $\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}$ diagonálisban álló i-edik elemének az inverze, így az imént végtelen összeg minden tagja olyan mátrix, amelynek elemei nemnegatívak.

Az eddig kihozott eredményeket a következő tételben foglalom össze:

4.2. Tétel. *Ha minden termelőnek van legalább egy olyan fogyasztója, amely legalább két termékvariánst fogyaszt, akkor létezik a* (4.23) *problémának megoldása. A gondolatmenet szerkezetéből látható, hogy egyetlen megoldás adódik.*

1. Következmény. *E tétel feltétele automatikusan teljesül, hiszen előzőleg – a tiszta monopóliumok kizárása miatt – feltettem, hogy $d_j^C \geq 2$ minden j-re igaz.*

4.3. Tétel. *A* (4.28) *elsőrendű feltételek megoldása nyomán kapott árvektor valóban tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly, azaz teljesülnek a megfelelő másodrendű feltételek.*

Bizonyítás. Ennek belátása a $\partial^2\pi_i/\partial p_i^2$ másodrendű parciális deriváltak vizsgálatát követeli meg tetszőleges i-re. Ha ez a derivált minden egyes i-re negatív értékű, akkor a p_i termékár valóban Nash-egyensúly, másként mondva a (4.23) feladat megoldása. A deriválást végrehajtva adott i-re azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2\pi_i}{\partial p_i^2} = -2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}) \tag{4.50}$$

Ez nyilvánvalóan negatív értékű, hiszen $d_j^C \geq 2$ minden j-re. ■

Felhívom a figyelmet arra, hogy még adós vagyok az absztrakt piacszerkezet (4.20b) tulajdonságának (egyedi keresett mennyiségek nemnegatív volta) belátásával. A (4.20c) már ebből egyenesen következik, hiszen a piactisztítás a modellkonstrukció eleme. Ezt azonban most még nem végzem el, a megfelelő bizonyításra egy későbbi egységben kerül sor.

4.3. Speciális esetek, következmények és példák

Ebben az alfejezetben elsőként az alapmodell egy speciális esetével foglalkozom, tekintve, hogy a szóban forgó eset meglehetősen egyedülálló kapcsolati struktúrára vonatkozik. Nagyon fontosnak tartom ennek a szituációknak az alaposabb elemzését, mivel az

bizonyos értelemben referenciapontként szolgálhat az alapmodell tekintetében. Megvizsgálok továbbá egy egyszerű számpéldát is, amely rámutat az alapmodell egy bizonyos sajátosságára konkrét paraméterek mellett. Végül az egyensúlyi árak heterogenitásának kérdését elemzem, amellyel kapcsolatban néhány érdekes megállapítást teszek.

A következő állítást azzal kapcsolatban fogalmazom meg, amikor teljes a kapcsoltsággal állunk szemben abban az értelemben, hogy minden egyes fogyasztó vásárolja az összes lehetséges termékvariánst. Ekkor a fogyasztók és termelők közötti interakciós háló egy teljes páros gráf segítségével reprezentálható. Véleményem szerint ez a speciális feltételrendszer különösen figyelemre méltó a vizsgálódásaimban, hiszen a lehető legsűrűbb kapcsolati rendszert jeleníti meg, amelyben az egyes termelők a kapcsolatok számát tekintve szimmetrikusak.

4.4. Tétel. *Tekintsük azt a helyzetet, amelyben minden fogyasztó vásárol az összes termelőtől. Ekkor az egyensúlyi termékárak azonosak.*

Bizonyítás. A most tárgyalandó speciális esetben a korábban már alkalmazott Sherman–Morrison-formula segítségével a $\mathbf{Q}^{-1}$ mátrixot explicit módon is meghatározom. Mielőtt azonban magát a formulát alkalmaznám, néhány előkészítő lépést meg kell tennem. Az alábbiakban felhasználom, hogy a tétel feltételei mellett igazak a következők:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \frac{N-M}{M}\mathbf{I}_M \tag{4.51a}$$

$$\mathbf{C} = \frac{(M-1)(N-M)}{M^2}\mathbf{I}_M \tag{4.51b}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \frac{N-M}{M^2}\mathbf{J}_M \tag{4.51c}$$

Tudjuk ugyanis, hogy $b_{ij} = 1/M$ ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N-M$), ezért némi számolás után kijönnek az alábbiak ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} = \frac{N-M}{M} \tag{4.52a}$$

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = \frac{(M-1)(N-M)}{M^2} \tag{4.52b}$$

Az iménti összefüggéseket figyelembe véve, kiszámíthatjuk a $\mathbf{Q}$ mátrixot. Felhasználva a $\mathbf{J}_M = \mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^\mathsf{T}$ felbontást, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Q} = \frac{N-M}{M^2}\left[(2M-1)\mathbf{I}_M - \mathbf{J}_M\right] = \frac{N-M}{M^2}\left[(2M-1)\mathbf{I}_M - \mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^\mathsf{T}\right], \tag{4.53}$$

amely főátlójában a $2(N-M)(M-1)/M^2$, azon kívül a $-(N-M)/M^2$ elemek állnak.

A $\mathbf{Q}$ mátrixra a Sherman–Morrison-formulát alkalmazva

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{-1} &= \frac{M^2}{N-M}\left(\frac{1}{2M-1}\mathbf{I}_M + \frac{\frac{1}{2M-1}\mathbf{I}_M\mathbf{J}_M\frac{1}{2M-1}\mathbf{I}_M}{1-\mathbf{1}_M^\top\frac{1}{2M-1}\mathbf{I}_M\mathbf{1}_M}\right)\\ &= \frac{M^2}{(2M-1)(N-M)}\left(\mathbf{I}_M + \frac{1}{M-1}\mathbf{J}_M\right)\end{aligned} \tag{4.54}$$

Ezenkívül látható, hogy a

$$\mathbf{c} = \frac{1}{M}\left[\frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j + \frac{\omega(M-1)(N-M)}{\alpha M}\right]\mathbf{1}_M \tag{4.55}$$

vektor koordinátái azonosak. Innen következik, hogy a (4.42) egyenlet jobb oldalán álló vektor összes koordinátája megegyezik, tehát az egyensúlyi árak megegyeznek. ■

Nézzük meg ennek a tételnek egy következményét. Kiszámítom az egyensúlyi árvektort és az egyedi keresett mennyiségeket. Ehhez felteszem, hogy $a_{ij} = 1$ minden i-re és j-re.

2. Következmény. *Jelöljük e tétel bizonyításában szereplő* $\mathbf{c}$ *vektor koordinátáit c-vel. Ekkor az egyensúlyi árvektor* (4.42) *alakját és* $\mathbf{Q}^{-1}$ *bizonyításban adott* (4.54) *képletét figyelembe véve a termelők által meghatározott p egyensúlyi termékár nagysága a következő:*

$$\begin{aligned}p &= \frac{M^2}{(2M-1)(N-M)}\left(c + \frac{Mc}{M-1}\right) = \frac{M^2}{(2M-1)(N-M)}\frac{(2M-1)c}{M-1}\\ &= \frac{M^2c}{(M-1)(N-M)}\end{aligned} \tag{4.56}$$

A c koordináta helyére behelyettesítve, és a $\overline{\gamma} = \sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j/(N-M)$ *jelölést bevezetve:*

$$\begin{aligned}p &= \frac{M}{(M-1)(N-M)}\left[\frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j + \frac{\omega(M-1)(N-M)}{\alpha M}\right]\\ &= \frac{M\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j}{\epsilon(M-1)(N-M)} + \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\overline{\gamma}M}{\epsilon(M-1)} + \frac{\omega}{\alpha}\end{aligned} \tag{4.57}$$

Az egyedi keresett mennyiségeket kiszámítva ($i = 1, 2, \ldots, M,\ j = 1, 2, \ldots, N-M$)*:*

$$x_{ij} = \frac{1}{M}\left[\gamma_j - \epsilon\left(p - \frac{Mp}{M}\right)\right] = \frac{\gamma_j}{M} \tag{4.58}$$

Megjegyzem, hogy a tételben szereplő feltételek teljesülésekor lehetséges reprezen-

tatív szereplővel helyettesíteni a termelői oldalt. Továbbá amennyiben minden egyes γ_j egyedi fogyasztás is azonos (γ), akkor a fogyasztói oldal szempontjából is bevezethető a reprezentatív ágens. Utóbbi esetben ugyanis a (4.2) alapján kiszámítható egyedi keresett mennyiség a következőre egyszerűsödik ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$):

$$x_{ij} = \frac{1}{M}\left[\gamma - \epsilon\left(p - \frac{Mp}{M}\right)\right] = \frac{\gamma}{M} \tag{4.59}$$

Következésképpen minden fogyasztó egyedi fogyasztása megegyező nagyságú, méghozzá γ/M.

A fenti megállapítás egy további lényeges következménye, hogy abból egyértelműen megállapítható, hogy vizsgált speciális interakciós hálózati struktúra mellett milyen tényező befolyásolják az árrés alakulását, vagyis annak mértékét, amennyivel a termelők átlagköltség (ami jelen esetben megegyezik a határköltséggel) felett áraznak. Az árrés függ a termelők számától, a $\overline{\gamma}$ átlagos fogyasztás nagyságától, nem utolsósorban pedig az árérzékenységi paramétertől. Az egyedi keresett mennyiségekre azonban a γ_j értékek mellett csak a termelők száma bír befolyással.

Az említettek mellett az is világosan látható, hogy ha a gazdaságban nagyszámú termelő van jelen, akkor $p \approx \overline{\gamma}/\epsilon + \omega/\alpha$ közelítés teljesül. Azaz a termelők monopolista pozíciójukból fakadóan továbbra is átlagköltség felett értékesítik termékeiket, az árrést pedig $\overline{\gamma}/\epsilon$ adja meg. Minél alacsonyabb ϵ értéke, vagyis minél kisebb az árérzékenységi paraméter, annál magasabb egyensúlyi árat állapítanak meg a termelők. Ha az előbbieken túl még azt is feltesszük, hogy γ_j értékek mindegyikének nagysága γ, akkor $\overline{\gamma} = \gamma$. Következésképpen $p \approx \gamma/\epsilon + \omega/\alpha$.

Ezen a ponton kitérek egy újabb speciális esetre. Továbbra is teljes interakciós hálózati szerkezet áll a vizsgálódás középpontjában, tehát $d_j^C = M$ igaz minden egyes j-re. Rögzített M, N értékek mellett és „végtelenül” nagy árérzékenység esetén az egyensúlyi termékár a következő lesz:

$$p = \frac{\omega}{\alpha} \tag{4.60}$$

Tehát minden termelő átlagköltségen termel, így zérus nyereséget realizál. A „végtelenül” nagy árérzékenység feltételezése mellett teljesen irreleváns, hogy az egyes szereplők kitől fogyasztanak, ezért a teljesen informált fogyasztók alkotta gazdaságban a termékárak kiegyenlítődése figyelhető meg. Ez pedig igazából tökéletesen versenyző piaci körülményeket eredményez. Tehát a szóban forgó határhelyzetben a modell a tiszta piaci versenyt reprodukálja. A szóban forgó eszményi szituációban a monopolhatás és az általa – az árrés megléte révén – előidézett holttehervesztesége is eltűnik.

Ezen a ponton természetes módon felmerülhet az a kérdés, hogy az imént tárgyalt eseten túl a hálózat összefüggő volta vajon szükségszerűen garantálja-e már az egyensúlyi

árak egyezőségét is, vagy ennél összetettebb a helyzet? A választ előrebocsátva látni fogjuk, hogy az egyértelműen nemleges. Ennek demonstrálása érdekében álljon itt egy meglehetősen egyszerűnek mondható, ugyanakkor mégis bizonyító erejű számpélda. Az eddigiekhez képest ebben a példában mindössze annyit történik, hogy egy teljes interakciós hálózati struktúrából az egyik kapcsolatot törlöm. Egészen pontosan a következőképpen definiálom az $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrixot: $a_{11} = 0$, de $a_{ij} = 1$, ha $i > 1$ vagy $j > 1$. A konkrét számításokat megelőzően fontosnak tartom azt is hangsúlyozni, hogy ahol lényeges, a kiszámított eredmény könnyebb értelmezhetősége érdekében azt két tizedesjegyre kerekített tizedestört alakban is feltüntetem.

1. Példa. Vegyük a következő 3×4-es $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Egyszerű számolással viszonylag könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ szorzatmátrix pozitív. Az előbbi reláció azt jelenti, hogy az interakciós hálózati szerkezetet reprezentáló gráf összefüggő abban az értelemben, hogy a termelőket megjelenítő csúcsokból indulva bármely, a termelőket megjelenítő csúcs elérhető véges hosszúságú – a fogyasztókat megjelenítő csúcsokat tartalmazó – úton.

Ha a paraméterek $\alpha = 0{,}3$, $\epsilon = 10$, $\omega = 3$ és $\gamma_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, N - M)$ választás mellett döntök, akkor (4.42) alapján az egyensúlyi árvektor koordinátái kiszámíthatók, és így a szóban forgó vektor a következőképpen alakul:[19]

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{5281}{520} \\ \frac{1321}{130} \\ \frac{1321}{130} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}156 \\ 10{,}162 \\ 10{,}162 \end{bmatrix}$$

Megjegyzem, hogy noha a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix szimmetrikus, azonban sem a főátlóban

[19]Érdekességként megjegyzem, hogy az $\alpha = 0{,}3$ egy bevett paraméterérték a szakirodalomban például hatványfüggvénnyel megadott termelési függvényeknél. Ezért jómagam is ezzel a választással élek a mostani példában, valamint számos további esetben is.

lévő, sem a főátlón kívüli elemei nem azonosak:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{45}{52} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{252}{377} & \frac{96}{377} \\ \frac{3}{13} & \frac{96}{377} & \frac{252}{377} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}87 & 0{,}23 & 0{,}23 \\ 0{,}23 & 0{,}67 & 0{,}25 \\ 0{,}23 & 0{,}25 & 0{,}67 \end{bmatrix}$$

A példa eddigi megállapításaihoz azt is hozzáfűzöm, hogy az **c** vektor koordinátái jól láthatóan sem azonosak:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{203}{30} \\ \frac{559}{60} \\ \frac{559}{60} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 6{,}77 \\ 9{,}32 \\ 9{,}32 \end{bmatrix}$$

A **c** vektor koordinátákban tapasztalható eltérés ugyan jelentősnek mondható, ez azonban mégsem vezet szignifikáns eltéréshez az egyensúlyi árvektor koordinátái tekintetében. Ennek van jelentősége, de erre csak a szimulációkat taglaló fejezetben térek ki.

Az előzőeket némileg általánosítva kimondok egy tételt arra nézve, hogy mit kell egy interakciós hálózati struktúrának teljesítenie ahhoz, hogy a termelői árak azonosak legyenek. Meghatározom az árheterogenitás szükséges és elégséges feltételét. Így a korábbi 4.4. Tételnél egy olyan jóval általánosabb eredményt kapunk, amely bizonyos fokig rávilágít az egyensúlyi ármechanizmus működésére egy speciális nézőpontból.

4.5. Tétel. *Az árhomogenitás szükséges és elégséges feltétele egy adott interakciós hálózati struktúránál, hogy* $\sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j b_{ij} / [\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})]$ *értékei azonosak legyenek minden egyes i-re.*

Bizonyítás. Felhívom a figyelmet arra, hogy a bizonyítás során csupa egyenértékű átalakítást végzek, és ennek jelentősége van. Ugyanis ez biztosítja a közölt gondolatmenet megfordíthatóságát.

Először tegyük fel, hogy az árak azonosak, amelyet a korábbiakhoz hasonlóan egyszerűen p-vel jelölök. A (4.42) helyett a következő, azzal ekvivalens alakot használjuk:

$$p\mathbf{Q}\mathbf{1}_M = \mathbf{c} \tag{4.61}$$

Alkalmazva **Q** és **c** definícióját, majd a megfelelő vektorműveleteket elvégezve, a kapott

egyenletrendszer i-edik egyenlete a következő:

$$\begin{aligned} &p\left[\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} + \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) - \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj}\right] \\ &= \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{M}\gamma_j b_{ij} + \frac{\omega}{\alpha}\sum_{j=1}^{M} b_{ij}(1-b_{ij}) \end{aligned} \tag{4.62}$$

Felhasználva, hogy $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj} = \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})$ azonosság igaz, a bal oldal összevonható:

$$p\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{M}\gamma_j b_{ij} + \frac{\omega}{\alpha}\sum_{j=1}^{M} b_{ij}(1-b_{ij}) \tag{4.63}$$

Néhány további átalakítást végezve kifejezhető p értéke:

$$p = \frac{\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j b_{ij}}{\epsilon\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\omega}{\alpha} \tag{4.64}$$

Innen pedig már következik a tétel egyik fele, egyik iránya. Arról az irányról van szó, amikor árhomogenitásból indulunk ki, és ebből a tételben szereplő feltétel teljesülésének szükségességére következtetünk.

A másik irány[20] igazolásához legyenek a $\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j b_{ij}/[\epsilon\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})]$ kifejezések azonosak minden i-re. Vegyük ezek után a

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j b_{ij}}{\epsilon\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\omega}{\alpha} \tag{4.65}$$

egyenletet. Ekkor $\hat{p}_i$ azonos minden i-re, erre az azonos értékre a $\hat{p}$ jelölést fogjuk használni. Az előbbiekben végrehajtott átalakításokat „visszafelé” elvégezve azt kapom, hogy

$$\hat{p}\mathbf{1}_M = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} \tag{4.66}$$

Ezt pedig a (4.42) áregyenlettel összevetve, a jobb oldalak azonossága miatt a bal oldalak is meg kell, hogy egyezzenek. Azaz $p_i = \hat{p}$ minden i-re, vagyis árhomogenitással állunk szemben. Ezzel bizonyítottuk a tételt. ■

3. Következmény. *Ennek a tételnek fontos következménye, hogy adott hálózati struktúrában az árak pontosan akkor heterogének, ha a* $\sum_{j=1}^{N-M}\gamma_j b_{ij}/[\epsilon\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})]$ *kifejezés értékei nem egyeznek meg minden i-re.*

[20] A gondolatmenet megfordítása, amikor a szóban forgó feltétel teljesüléséből indulunk ki, és árhomogenitásra szeretnék következtetni.

4. Következmény. *Ha minden fogyasztó ugyanannyi termékvariánst fogyaszt, azaz $d_j^C = d$ minden egyes j-re fennáll, valamint azonosak az összkeresletek is, tehát $\gamma_j = \gamma$ szintén minden egyes j-re igaz, akkor az árak homogének.*

Tegyük fel ugyanis, hogy az i-edik termelővel d_i^P fogyasztó van kapcsolatban, ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j b_{ij}}{\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} = \frac{\gamma d_i^P d}{\epsilon d_i^P (d-1)} = \frac{\gamma d}{\epsilon(d-1)}$$

Megjegyzendő, hogy a fenti általánosabb tételből egyszerűen következik a speciálisabb 4.4. Tétel. Ugyanis teljes páros gráfreprezentációt feltételezve a termelők és fogyasztók közötti interakciós hálózati struktúrát illetően

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j b_{ij}}{\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} = \frac{M \sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j}{\epsilon(M-1)(N-M)} = \frac{\overline{\gamma} M}{\epsilon(M-1)}$$

Ehhez azonban mindjárt szeretném hozzáfűzni, hogy 4.4. Tétel bizonyítására azért van mégis szükség, mert az abban (tehát magában a gondolatmenetben) szereplő eredményeket a későbbiekben felhasználom.

Végezetül megvizsgálom más oldalról a $\sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j b_{ij} / [\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})]$ törtet. A fenti analízisből azonnal látható, hogy ez a kifejezés nem más, mint a monopolista jelenlétből, vagyis a piac nem tökéletesen versenyző jellegéből fakadó árrés. Ugyanis a határköltségnél pontosan ennyivel szab magasabb árat minden termelő.

Az árrésnek mint az alapmodell egyfajta mutatószámának az értékére tekinthetünk úgy, mint ami egy termelő piaci jelentőségét, másként fogalmazva a termelőnek való kitettséget kívánja megragadni. Ugyanis b_{ij} azt mutatja meg, hogy a j-edik fogyasztó mennyire kitett az i-edik termelőnek. A kitettség annál nagyobb, minél nagyobb b_{ij}. Másrészt az $1 - b_{ij}$ különbség arra mutat rá, hogy a j-edik fogyasztó mennyire kitett a többi szereplőnek. Így bizonyos értelemben a $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})$ összeg az i-edik termelőnek való kitettségi mérőszám, másként fogalmazva az i-edik termelő dominanciája.

Mégis az árrés dominancia-mutatóként való alkalmazhatóságának hiányosságát tükrözi, hogy annak értékei megegyezhetnek bizonyos fentebb ismertetett speciális feltételek mellett úgy, hogy az interakciós hálózati struktúra nem teljes (lásd 4. Következmény). Ebből adódik, hogy az árrés egy termelő piaci erejét és árdöntését illetően kontraintuitív. Így ez nem vehető figyelembe a piaci pozíció és az árazás viszonyának vizsgálatakor. Ennek ellenére az árrés mégis rámutat a modell bizonyos mögöttes szerkezeti tulajdonságaira, még ha csak csekélyebb mértékben is.

4.4. Struktúraelemzés és centralitás

Ebben a részben tovább vizsgálom a modellt, és vizsgálatomba már hálózatelméleti eszközöket is bevonok. Az alfejezet során kizárólag az egyensúlyi árvektorra koncentrálok, egy későbbi fejezetben azonban kitérek az egyensúlyi kibocsátásvektorra is. Az árvektort azonban most más aspektusból vizsgálom. Ebben az elemzésben központi szerepe lesz az interakciós hálózati struktúra szerkezetének, pontosabban egy ezt jellemző, a hálózati pozíciót mérő centralitási mérőszámnak. Ennek a centralitási mérőszámnak a segítségével alaposabban meg lehet érteni a modell működését, azt ugyanis kapcsolatba hozom az egyensúlyi árvektorral. Magát a mérőszámot módosított sajátvektor-centralitásnak hívom. Erre nagy hangsúlyt mind a jelenlegi, mind a további egységekben, olyannyira, hogy ennek a mérőszámnak szerepe lesz a szimulációk során is. A centralitásokon kívül másfajta szerkezeti vizsgálattal is foglalkozom, amelyben a $\mathbf{Q}$ mátrixot illetve annak inverzét elemzem. Vizsgálódásom az e mátrixokban rejlő információtartalom – nem feltétlenül teljes körű – kibontását célozza, amely persze szorosan összefügg a centralitás témájával.

Mielőtt érdemben a részletekbe belemennék, emlékeztetni szeretnék arra, hogy ugyan az előző alfejezet végén már szerepelt egy, a hálózati szerkezetet és az árak heterogenitását leíró mutatószám, maga az árrés. Ennek azonban rámutattam egy jelentős hiányosságára. E mutató ugyan jó indikátor az árak heterogenitását tekintve, de nem árul el eleget az egyensúlyi árak és a hálózati szerkezet, hálózati pozíció viszonyáról. Ennek segítségével nem tudjuk meg, hogy az áralakulást, a termékárak nagyságát valójában mi „mozgatja”. Következésképpen a szóban forgó mutatószám nem képes szolgálni ennek az alfejezetnek a célkitűzéseit.

Ezt a hiányosságot némileg orvosolva alaposabban megvizsgálom a hálózati szerkezet szerepét az áralakulásban. A mögöttes hálózati szerkezet felfejtéséhez nézzük meg a (4.42) áregyenletet, amelynek tekintetében az egyszerűség kedvéért bevezetem $\mathbf{Q}^{-1}$ megfelelő elemére az μ_{ij} jelölést. Mivel tudjuk, hogy a $\mathbf{Q}^{-1} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}^n$ végtelen sor konvergens, ezért

$$p_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N-M} \mu_{ij} \left[\frac{\gamma_k b_{jk}}{\epsilon} + \frac{\omega}{\alpha} b_{jk}(1 - b_{jk}) \right], i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.67}$$

A μ_{ij} elem a fenti végtelen sor alapján explicit is felírható ($i, j = 1, 2, \ldots, M$):

$$\mu_{ij} = \kappa \left(\delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}^{(n)} \right), \tag{4.68}$$

ahol δ_{ij} a Kronecker-deltát jelöli, amely pontosan akkor vesz fel egyet, ha $i = j$, különben értéke nulla; $v_{ij}^{(n)}$ pedig a $\mathbf{V}^n$ mátrix megfelelő nemnegatív eleme ($n \geq 1$), és $v_{ij}^{(1)} = v_{ij}$. Ezek az összegek mutatják az aktorok interakcióiból eredő közvetlen és közvetett hálózati

hatásokat.

A μ_{ij} jobb megértése végett használom a $\mathbf{V}$ mátrix definícióját és a binomiális tételt. Azt szeretném kideríteni, hogy a sajátértékek milyen szerepet játszanak a szóban forgó érték tekintetében. A sajátértékek ugyanis különösen fontos karakterizációját adják egy-egy mátrixnak. Az említett binomiális tételt figyelembe véve

$$(\mathbf{I}_M - \kappa\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n}(-\kappa)^k\binom{n}{k}\mathbf{Q}^k \tag{4.69}$$

Behelyettesítést követően

$$\mathbf{Q}^{-1} = \kappa\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-\kappa)^k\binom{n}{k}\mathbf{Q}^k \tag{4.70}$$

Gráfelméleti fogalmakat használva azt mondhatjuk, hogy a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix i-edik sorának k-edik eleme nulla, ha nincs i és k között út. Mivel

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = (\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathsf{T}} + \mathbf{C}^{\mathsf{T}} - (\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q}, \tag{4.71}$$

vagyis $\mathbf{Q}$ szimmetrikus valós számokból álló mátrix, ezért a spektrálfelbontás tétele alapján felírható a következőképpen:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}^{-1} \tag{4.72}$$

alakban, ahol $\mathbf{Z}$ ortogonális mátrix, $\mathbf{\Phi}$ a $\mathbf{Q}$ sajátértékeit tartalmazó diagonális mátrix, előbbi főátlójának i-edik eleme ϕ_i. Mivel $\mathbf{Q}^k = \mathbf{Z}\mathbf{\Phi}^k\mathbf{Z}^{-1}$, ebből következik, hogy

$$\mathbf{Q}^{-1} = \kappa\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-\kappa)^k\binom{n}{k}\mathbf{Z}\mathbf{\Phi}^k\mathbf{Z}^{-1} \tag{4.73}$$

Ez azt jelenti, hogy az árak alakulását befolyásolják $\mathbf{Q}$ sajátértékei. Megjegyzem, hogy mivel $\mathbf{Q}$ reguláris, így egyik sajátértéke sem nulla. Mátrixszorzással ellenőrizni lehet, hogy a $\mathbf{Z}\mathbf{\Phi}^k\mathbf{Z}^{-1}$ általános eleme, például i-edik sorának k-adik eleme $\sum_{m=1}^{M}\phi_m^k z_{im}z_{mk}$, ahol z_{im} jelöli $\mathbf{Z}$-nek az i-edik sorában álló m-edik elemet, z_{mk} pedig ugyanezen mátrix m-edik sorában álló k-adik elemet. Megjegyzem, hogy (4.73) úgy is írható mint

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Z}\left[\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-\kappa)^k\binom{n}{k}\mathbf{\Phi}^k\right]\mathbf{Z}^{-1}, \tag{4.74}$$

ami azt jelenti, hogy $\mathbf{Q}^{-1}$ és $\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-\kappa)^k\binom{n}{k}\mathbf{\Phi}^k$ hasonlók, vagyis bázistranszformációval egyik a másikba vihető.

A (4.67) összefüggést alaposabban szemügyre véve világos, hogy minden egyes termelőt illetően, $\mathbf{c}$ koordinátáinak lineáris kombinációjaként alakul ki az egyensúlyi termékár,

ahol μ_{ij}-k az egyes súlyok az i-edik termelőt illetően. Tehát, ha $\mathbf{m}_i$ oszlopvektor j-edik eleme μ_{ij}, akkor

$$p_i = \mathbf{m}_i^\mathsf{T}\mathbf{c} \tag{4.75}$$

Megjegyzem, hogy a $\mathbf{m}_i^\mathsf{T}$ vektor a $\mathbf{Q}^{-1}$ mátrix i-edik sorvektorával egyezik meg. A szimbólumok szintjén $\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_M)^\mathsf{T}$. Vagyis az utóbbi mátrix hordozza az információt a hálózati struktúrát illetően, valamint ragadja meg annak árképzésben betöltött szerepét.

Elemzésemet néhány megjegyzéssel folytatom, amelyek a fenti vizsgálódásaimat mélyítik el, rámutatva további szempontokra:

1. Mivel a $\mathbf{V}$ mátrix egyértelműen nemnegatív, ez definíció szerint azt jelenti, hogy $v_{ij} \geq 0$ biztosan teljesül, és $v_{ij} > 0$ akkor és csak akkor igaz, ha van olyan fogyasztó, amelyik fogyaszt az i-edik és j-edik termelőtől is. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy i-edik és j-edik termelő az említett fogyasztón keresztüli „kapcsolata” közvetlen hatást gyakorol a p_i egyensúlyi árra ($i, j = 1, 2, \ldots, M$).

2. Ha azonban $v_{ij} = 0$, de $\mu_{ij} > 0$, akkor azt mondjuk, hogy i-edik és j-edik termelő közvetett hatást gyakorol a p_i egyensúlyi árra ($i, j = 1, 2, \ldots, M$).

3. Utóbbira példa, ha $v_{ij} = 0$, viszont $v_{ik}v_{kj} > 0$ ($i, j, k = 1, 2, \ldots, M$). Ez csak úgy fordulhat elő, ha a szorzat mindkét tényezője pozitív. Vagyis van olyan fogyasztó, amelyik fogyaszt i-től és k-tól, továbbá van olyan fogyasztó is, amelyik fogyaszt k-tól és j-től.

E megjegyzéseket követően definiáljuk a következő $M \times M$-es $\mathbf{A}_W$ súlyozott kapcsolati mátrixot:

$$a_{ij}^W = \begin{cases} \mu_{ij}, \text{ ha } v_{ij} > 0 \\ 0, \text{ ha egyébként,} \end{cases}$$

ahol a_{ij}^W a kapcsolati mátrix i-edik sorának j-edik eleme.[21] Vagyis akkor húzunk be egy élet az i-edik és j-edik termelő közé, ha van olyan fogyasztó, amelyik mindkettővel kapcsolatban van. Megjegyzem, hogy ez a gráf nem egyszerű, hiszen tartalmaz hurokélt. Ez annak a következménye, hogy $\mu_{ii} > 0$ minden i-re.

4.6. Tétel. *Ha az $\mathbf{A}_W$ mátrix szerinti gráf összefüggő, akkor $\mathbf{Q}^{-1} > 0$.*

Bizonyítás. Mivel feltételeztem, hogy $\mathbf{A}_W$ összefüggő, ezért a gráf bármely két csúcsa között biztosan megy (legfeljebb) $(M-1)$-hosszúságú út. Eszerint az $\mathbf{A}_W^{M-1}$ pozitív. Utóbbi

[21] Ezt a definíciót vesd össze Bimpikis et al. (2019) cikkének W súlyozott kapcsolati mátrix illetve az ahhoz kapcsolódó $\mathcal{L}(G)$ gráf definíciójával.

pontosan azt jelenti, hogy a $\mathbf{V}^{M-1}$ mátrix is pozitív. Innen pedig már következik, hogy a $\mathbf{Q}^{-1} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}^n$ inverzmátrix is pozitív. Ezzel igazoltuk a tételt. ■

5. Következmény. *Az iménti tétel feltételeinek teljesülése mellett $\mu_{ij} > 0$ igaz minden i, j-re, mert a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix pozitív.*

Ezek után könnyen látható, hogy $\mu_{ij} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha i-ből (vagyis az interakciós hálózati struktúra i-edik termelőt megjelenítő csúcsából) szintén fogyasztókat reprezentáló csúcsok sorozatán keresztül eljuthatunk j-be (tehát az interakciós hálózati struktúra j-edik termelőt megjelenítő csúcsába). Mivel minden termelőnek van fogyasztója, továbbá minden fogyasztó legalább két termékvariánst fogyaszt, ezért az $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrixnak nem lehet olyan sora, amelyben csak nulla szerepel. Másként mondva, minden i esetén biztosan található olyan j, hogy $\mu_{ij} > 0$ legyen. Azaz $p_i > 0$ minden i-re teljesül, ha a $\mathbf{c}$ vektor összes eleme pozitív. Azonban $\mathbf{c}$ biztosan pozitív lesz, hiszen minden termelőtől vásárol valaki. Így ismét eljutottam annak belátásáig, hogy $\mathbf{p}$ pozitív.

2. Példa. A fentiek példán keresztüli demonstrálására most megvizsgálok egy speciális esetet, nevezetesen azt, amikor a hálózatot megjelenítő páros gráf teljes. Ennek során korábbi eredményre támaszkodom.

A 4.4. Tétel bizonyítását használva kiszámíthatjuk, hogy

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \frac{M^2}{(2M-1)(M-1)(N-M)}, \text{ha } i \neq j \\ \frac{M^3}{(2M-1)(M-1)(N-M)}, \text{ha } i = j \end{cases} \tag{4.76}$$

Innen pedig viszonylag könnyen kalkulálható, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M} \mu_{ij} =& \frac{M^3}{(2M-1)(M-1)(N-M)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} \mu_{ij} = \frac{M^3}{(2M-1)(M-1)(N-M)} \\ &+ \frac{(M-1)M^2}{(2M-1)(M-1)(N-M)} = \frac{M^2}{(M-1)(N-M)} \end{aligned} \tag{4.77}$$

A $\mathbf{c}$ vektor definíciójából következik, hogy a példában megjelölt struktúra mellett annak minden eleme: $c = \sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j / M$. Ezért tetszőleges termelő egyensúlyi ára

$$p = \frac{M^2 c}{(M-1)(N-M)} = \frac{M \sum_{j=1}^{N-M} \gamma_j}{\epsilon(M-1)(N-M)} + \frac{\omega}{\alpha} \tag{4.78}$$

Vagyis egy kicsit más módon számolva visszakaptuk azt az egyensúlyi áregyenletet, amelyet a (4.57) összefüggésben már kikalkuláltam.

Mivel beláttuk $\mathbf{A}_W$ nemnegatív mátrix, ezért a Perron–Frobenius-tétel következtében

létezik legnagyobb (domináns) nemnegatív ϕ^{dom} sajátértéke illetve ehhez tartozó nemnegatív (domináns) $\mathbf{v}^{\text{dom}}$ sajátvektor. Ezenkívül az $\mathbf{A}_W$ mátrix szimmetrikus is. Ezért a spektrálfelbontás tétele miatt a szóban forgó mátrix sajátértékei bázist alkotnak az $\mathbb{R}^M$-ben, amely bázis elemei $\mathbf{v}^{\text{dom}}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_M$. Ezen sajátvektorokról az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy normalizáltak, így egy sajátvektorokból álló ortonormált bázishoz jutunk, vagyis $\left\|\mathbf{v}^{\text{dom}}\right\|_2 = \|\mathbf{e}_i\|_2 = 1$, ha $i = 2, 3, \ldots, M$. Mivel igaz, hogy $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^M$, ezért

$$\mathbf{c} = \left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle \mathbf{v}^{\text{dom}} + \sum_{i=2}^{M} \langle \mathbf{c}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \tag{4.79}$$

A domináns sajátvektor nemnegativitása következtében $\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \rangle \geq 0$. A Parseval-formula szerint

$$\|\mathbf{c}\|_2 = \left(\left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle^2 + \sum_{i=2}^{M} \langle \mathbf{c}, \mathbf{e}_i \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.80}$$

ami azt jelenti, hogy amennyiben $\mathbf{c}$ skalár szorosa a domináns sajátvektornak, akkor teljesül a $\|\mathbf{c}\|_2 = \langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \rangle$ egyenlőség.

Ezt felhasználva áttérek $\mathbf{p}$ felírására. Ezt két lépésben fogom megtenni. A felírás rámutat az alábbiakban definiált centralitásvektor és az egyensúlyi árvektor kapcsolatára, annak az interakciós hálózati struktúra jellegétől való függőségére.

A (4.79) felírást használva a (4.42) az alábbi módon írható:

$$\mathbf{p} = \left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle \mathbf{A}_W \mathbf{v}^{\text{dom}} + \underbrace{\left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle (\mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{A}_W) \mathbf{v}^{\text{dom}} + \sum_{i=2}^{M} \langle \mathbf{c}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i}_{\mathbf{p}^R}, \tag{4.81}$$

ahol a $\mathbf{p}^R$ vektort reziduális tagnak fogom hívni. A bevezetett jelölést figyelembe véve az írható, hogy

$$\mathbf{p} = \phi^{\text{dom}} \left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle \mathbf{v}^{\text{dom}} + \mathbf{p}^R \tag{4.82}$$

Kiszámítva (4.82) alapján $\mathbf{p}$ normáját, azt kapjuk, hogy

$$\|\mathbf{p}\|_2 = \left[\left(\phi^{\text{dom}} \left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle \right)^2 + 2\phi^{\text{dom}} \left\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\text{dom}} \right\rangle \left\langle \mathbf{v}^{\text{dom}}, \mathbf{p}^R \right\rangle + \left(p_i^R \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.83}$$

Tehát $\mathbf{p}$ normájának alakulása szempontjából az egyes hatásokat mutatja a fenti felbontás.

Mielőtt továbbmennék a gondolatmenetemmel, teszek megjegyzést az iméntiekhez kapcsolódóan:

1. A $\mathbf{v}^{\text{dom}}$ vektor koordinátái a sajátvektor-centralitás mintájára az $\mathbf{A}_W$ mátrixhoz rendelt módosított sajátvektor-centralitásokat tartalmazza. Sőt, mivel $\mathbf{Q}$ szimmetrikus, ezért $\mathbf{Q}^{-1}$ is az, tehát $\mathbf{A}_W$ által reprezentált súlyozott gráf irányítatlanként kezelhető.

Megjegyzem, hogy e ponton még nyilvánvalóbbá válhat a dolgozat egésze szempontjából a – szakirodalmi részben nagy hangsúly kapó – centralitásvektor szerepe, amelyet a (3.1) képlet révén precízen felírtam, sőt ezen túlmenően a sajátvektor-centralitással való kapcsolatára is röviden utaltam.

2. Ha $\mathbf{v}^{\text{dom}} > 0$ teljesül, akkor a ϕ^{dom} sajátérték is pozitív, hiszen $\mathbf{A}_W$ minden sorában található legalább egy egyes.

3. Ha az $\mathbf{A}_W$ által reprezentált súlyozott gráf/hálózat (erősen) összefüggő (másként fogalmazva $\mathbf{A}_W$ irreducibilis), azaz van olyan $k \leq M - 1$ pozitív egész, hogy $\mathbf{A}_W^k$ pozitív mátrix, akkor $\mathbf{v}^{\text{dom}}$ pozitív.[22]

A (4.82) egyenletből látható, hogy az áralakulást az általam bevezetett sajátos, azaz módosított sajátvektor-centralitáson kívül befolyásolják reziduális tagok is. Ezeknek a tagoknak a hatása függ az egyes $\mathbf{e}_i$-k koordinátáinak előjelétől, abszolút nagyságától, valamint az együtthatók előjelétől és abszolút nagyságától is.

3. Példa. Nézzünk egy egyszerű, de konkrét példát. Induljunk ki ismét abból, hogy teljes páros gráffal van dolgunk. Ekkor magától értetődik, hogy $\mathbf{A}_W = \mathbf{Q}^{-1}$. Mivel korábban beláttam, hogy ekkor $\sum_{j=1}^{M} \mu_{ij} = M^2/[(M-1)(N-M)]$, ami egyben $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz i-edik sorösszege is, így következik, hogy

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{1}_M = \frac{M^2}{(M-1)(N-M)}\mathbf{1}_M \tag{4.84}$$

Tehát $\phi^{\text{dom}} = M^2/[(M-1)(N-M)]$ és $\mathbf{v}^{\text{dom}} = \mathbf{1}_M/M^{1/2}$ egy ehhez tartozó sajátvektor. Ezért, ha $\mathbf{c}$ koordinátái azonosak, és azokat ismét c jelöli, akkor

$$\mathbf{p} = \phi^{\text{dom}} M^{\frac{1}{2}} c \mathbf{v}^{\text{dom}} \tag{4.85}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a szóban forgó speciális esetben a $\mathbf{v}^{\text{dom}}$ centralitásokat tartalmazó vektor konstans szorosa az árvektor, nincs reziduális tag. Tehát abban az esetben, ha teljes interakciós hálózati struktúrát feltételezek, a módosított sajátvektor-centralitás és az egyensúlyi árvektor között determinisztikus összefüggés van.

Felvetődik azonban a jogos kérdés, hogy vajon a reziduális tagnak van-e egyáltalán jelentősége. Ennek vizsgálatához az 1. Példából indulok ki, és annak az eredményeit használom egy újabb példa bemutatása során. A korábbihoz hasonlóan e példa is azzal a könnyebbséggel jár, hogy $\mathbf{A}_W = \mathbf{Q}^{-1}$ teljesül. Számításaim során (most) a könnyebb áttekinthetőség érdekében tizedestört alakot használok. A felírásban két tizedesjegyet veszek figyelembe.

[22] E megjegyzés kapcsán lásd például Brualdi és Cvetković (2009) könyvét.

4. Példa. Először kiszámítom a $\mathbf{Q}^{-1}$ sajátértékeit és a megfelelő ortonormált sajátvektorokat:

$$\phi^{\text{dom}} = 1{,}22, \mathbf{v}^{\text{dom}} = \begin{bmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}52 \\ 0{,}52 \end{bmatrix}, \varphi_2 = 0{,}57, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}74 \\ -0{,}48 \\ -0{,}48 \end{bmatrix}, \varphi_3 = 0{,}41, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}71 \\ -0{,}71 \end{bmatrix}$$

Ahhoz, hogy a (4.79) lineáris kombináció felírható legyen, vagyis, hogy a megfelelő együtthatókat megadja, az alábbi egyenletet szükséges megoldani:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\text{dom}} & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{c}$$

Innen azt kapom, hogy $\mathbf{z} = [14{,}29, -3{,}91, 0]^{\mathsf{T}}$. Vagyis az egyensúlyi árvektor (4.82) szerinti alakja:

$$\mathbf{p} \approx 17{,}43\mathbf{v}^{\text{dom}} - 2{,}23\mathbf{e}_2$$

Kijött tehát, hogy a reziduális tag nem feltétlenül zérus. Találtunk ugyanis olyan nem teljes hálózatot, ahol a szóban forgó összegnek szerepe van.

Az eddig leírtakból következik, hogy az $\mathbf{Q}^{-1}/\kappa = (\mathbf{I}_M - \mathbf{V})^{-1}$ inverz magába sűríti az interakciós hálózat szerkezetének egyes fontos jellemzőit. Ha ugyanis a hálózat szerkezetében változás áll be, akkor μ_{ij} érték megváltozik, de a μ_{ij} értékek kapcsolatban vannak $\mathbf{Q}^{-1}$ sajátértékeivel és sajátvektoraival is. Továbbá egy újabb centralitás-mutató definiálható $\mathbf{Q}^{-1}$ mátrixból származtatott $\mathbf{A}_W$ mátrix domináns sajátvektora segítségével. Ezzel lényegét tekintve akár le is zárhatnám ezt az alfejezetet, mégis egy kisebb szerkezeti egység erejéig kitérek az árváltozás és az interakciós hálózati szerkezet kapcsolatszámnövekedésének kérdésére, e kettő közötti összefüggés vizsgálatára.

4.4.1. Kiegészítő megjegyzés: az egyensúlyi árak alternatív felírása

Az alfejezet zárásaként a struktúraelemzés szempontjából egy releváns megjegyzést teszek. Megnézem az egyensúlyi árak egy másik – a (4.67) képlettől eltérő – felírását. Előrebocsátom, hogy az egyensúlyi áraknak és árvektornak az említett alternatív felírása lehetővé teszi a κ paraméter kiküszöbölését, továbbá a közvetlen és közvetett hálózati hatások megragadásának egy újabb módját szolgáltatja.

A fent vázolt cél elérése érdekében a (4.49) azonosságot veszem alapul. Felhasználva, hogy a $\left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1}$ inverzmátrix diagonális és főátlójának i-edik eleme $1/\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2 - b_{ij})$,

az egyensúlyi ár a következőképpen írható ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$p_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N-M} \nu_{ij} \frac{\alpha\gamma_k b_{jk} + \epsilon\omega b_{jk}(1 - b_{jk})}{\epsilon\alpha \sum_{m=1}^{N-M} b_{jm}(2 - b_{jm})}, \tag{4.86}$$

ahol ν_{ij} szorzótényező a $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right]^n$ végtelen sor eredményezte $M \times M$-es mátrix megfelelő eleme. Megjegyzem, hogy a (4.49) egyenletre támaszkodva megmutatható, hogy az iménti összefüggés az alábbi vektoros alak kifejtésének eredményeként adódik:

$$\mathbf{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right]^n \left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1} \mathbf{c} \tag{4.87}$$

Ha a $\left[\left(\widetilde{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\right]^n$ a mátrix i-edik sorának j-edik elemét a $\ell_{ij}^{(n)}$ szimbólum jelöli, akkor ν_{ij} a felírható a következőképpen ($i, j = 1, 2, \ldots, M$):

$$\nu_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{ij}^{(n)} \tag{4.88}$$

Az áralakulás szempontjából imént leírtaknak fontos jelentősége van. Ugyanis látható, hogy az egyensúlyi árképzésnek – egy olyan viszonylag egyszerű modellben is mint ami a disszertációban szerepel – van olyan vetülete, amely meglehetősen bonyolultnak mutatkozik. Látszik, hogy az árak nagyságának tekintetében nemcsak egy adott termelőtől fogyasztóinak száma befolyásolja, hanem például az is, hogy a tőle várásló fogyasztók mennyi termékvariánst fogyasztanak. Tehát kizárólagos módon egy olyan centralitási mutatószámmal nem jellemezhető a termelői árképzés, amely mutató csak a termelővel kapcsolatban álló fogyasztók számát veszi figyelembe. A közgazdasági tartalom említetteken túlmenő megragadása azonban a sokféle hatás miatt meglehetősen bonyolultnak tűnik.

4.5. Fogyasztás, kibocsátás és nyereség

Ebben az alfejezetben azzal foglalkozom, hogy miként alakulnak az egyedi fogyasztások, kibocsátások illetve nyereségek egyensúlyi értékei. Előbbiekről kimutatom, hogy egyensúlyi árak mellett nemnegatívak, sőt pontosan akkor pozitívak, ha az adott fogyasztó vásárolja az adott termelő termékét. Az egyedi kibocsátások és nyereségek szintén relevánsak a modell szempontjából, így szólnom kell ezeknek az egyensúlyi árakhoz való kapcsolatáról.

Fentebb kimondtam egy állítást arra nézve, hogy milyen feltételek teljesülésekor lehetséges a (4.42) vektoregyenlet szerint egyensúlyi árakat meghatározni a gazdaságban. Ez a mostanáig leírtak szempontjából olyannyira központi megállapítás, amely az általam

vizsgált interakciós hálózati struktúra egy jelentőségteljes közgazdasági következményére mutat rá, nevezetesen arra, hogy a vizsgált viszonyrendszer milyen feltétel teljesülése mellett (minden termelőnek van legalább egy olyan fogyasztója, amely legalább két termékváltozatot fogyaszt) teszi lehetővé a szereplők részéről az egyensúlyi ármeghatározást.

Az eddigieket összegezve megmutattam, hogy tetszőleges, az alapmodellben vizsgált hálózati szerkezet mellett van egyensúlyi árvektor. Ezzel még persze nem értem a vizsgálódás végére. Ugyanis azt is be kell látni, hogy az egyensúlyi árvektorban szereplő árakkal számolva, a (4.2) szerint definiált egyedi keresleti függvények nemnegatívak. Vagyis igazolni szükséges az absztrakt piacszerkezet definíciójában szereplő (4.20b) feltételt.

4.7. Tétel. *Egyensúlyi termékárak mellett pontosan akkor teljesül a* (4.20b) *feltétel, ha az egyensúlyi termékár eleget tesz a* $p_i \geq \omega/\alpha$ *egyenlőtlenségnek minden i-re. Mivel a szóban forgó egyenlőtlenség biztosan igaz lesz, ezért fennáll a* (4.20b) *kritérium is.*

Bizonyítás. A (4.2) egyedi keresleti függvényből indulok ki. Be szeretném látni, hogy az egyensúlyi termékárak mellett teljesül az $x_{ij}(\mathbf{p}) \geq 0$ egyenlőtlenség ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$). Az egyedi keresleti függvény külső zárójelét felbontva, majd az egyenlőtlenséget átrendezve, az iménti nemnegativitás pontosan akkor teljesül, ha

$$b_{ij}\gamma_j \geq \epsilon b_{ij}\left(p_i - \overline{p}_j\right) \tag{4.89}$$

Felhasználva $\overline{p}_j$ definícióját és némi átalakítást végezve kijön, hogy

$$\frac{b_{ij}\gamma_j}{\epsilon} + b_{ij}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{kj}p_k \geq b_{ij}(1 - b_{ij})p_i \tag{4.90}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát kettővel osztva:

$$\frac{b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon} + \frac{b_{ij}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{kj}p_k}{2} \geq \frac{b_{ij}(1 - b_{ij})p_i}{2} \tag{4.91}$$

Összegzést végezve minden piaci szereplőre:

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k}{2} \geq \frac{p_i}{2}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}) \tag{4.92}$$

Majd az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$ összeggel elosztva:

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k}{2\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})} \geq \frac{p_i}{2} \tag{4.93}$$

A B. függelékben található (B.1) áregyenletet felhasználva:

$$p_i - \frac{\omega}{2\alpha} \geq \frac{p_i}{2}, \tag{4.94}$$

vagyis $p_i \geq \omega/\alpha$. A következő lépésben a hivatkozott (B.1) áregyenlet alapján belátom, hogy $p_i - \omega/\alpha \geq 0$, ezért teljesül a kívánt egyenlőtlenség is. Legyen $\underline{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_M\}$. Becsüljük alulról a $\underline{p}$ értékét úgy, hogy a (B.1) jobb oldalának kifejezésében lévő termékárak helyébe $\underline{p}$ értéket helyettesítjük:

$$\underline{p} > \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\underline{p} \sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}}{2 \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\omega}{2\alpha} \tag{4.95}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalának első (nemnegatív) tagját elhagyva, valamint a (4.44) összefüggést alkalmazva, a következő becslés adódik:

$$\underline{p} > \frac{\underline{p}}{2} + \frac{\omega}{2\alpha} > 0 \tag{4.96}$$

Megfelelő átrendezés után a $\underline{p} > \omega/\alpha$ jön ki. Mivel pedig $p_i \geq \underline{p} > \omega/\alpha$ tetszőleges i-re fennáll, ezért a tétel bizonyítást nyert. ■

Ez úgy is fogalmazható, hogy $\alpha \geq \omega/p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, M$), azaz a határtermelékenység legalább akkora kell, hogy legyen mint a termelőnkénti munkabér. Tehát az elérhető legmagasabb munkabérnél nem lehet alacsonyabb. Ha α egy egynél kisebb pozitív szám, akkor ebből következik, hogy a termékárak mindig magasabbak a munkabérnél. Tehát a ω/p_i cserearány, vagyis a munka relatív ára egynél kisebb. Azonban, ha $\alpha > 1$, akkor fordított a helyzet. Másként úgy is mondhatjuk, hogy minden termelőnek olyan egyensúlyi árat kell meghatároznia, amelyik nem kisebb az átlagköltségnél. Tehát a közgazdasági szakirodalommal összhangban lévő állítást kaptam.

Figyelembe véve a modellben használt lineáris termelési függvényt, $p_i = \omega/\alpha$ azt a termékárat jelenti, amely mellett a nyereség pontosan zérus. A $p_i \geq \omega/\alpha$ feltétel közgazdaságilag azt jelenti, hogy minden piaci szereplő el akarja kerüli a veszteséget (tökéletes versenyző piactól eltérő körülmények között), és képes olyan egyensúlyi termékár beállítására is, amely ezt lehetővé teszi. Meg kell jegyezni, hogy a fenti bizonyítás gondolatmenetét használva egyszerűen belátható, hogy amennyiben bármelyik j fogyasztó ténylegesen vásárol az i-edik termelőtől, vagyis ha $x_{ij}(\mathbf{p}) > 0$ fennáll, akkor a $p_i > \omega/\alpha$ szigorú egyenlőtlenséget kell megkövetelni. Az alapmodell feltevései, jellegzetességei miatt pedig tudjuk, hogy $\sum_{j=1}^{N-M} x_{ij}(\mathbf{p}) > 0$. Tehát minden i esetén $y_i(\mathbf{p}) > 0$ teljesül. Figyelembe véve a (4.18) formulát, valamint a 4.7. Tételt, $\pi_i(\mathbf{p}) > 0$ relációt is igaz lesz. Vagyis az egyensúlyi termékárak esetében minden termelő nyeresége pozitív.

Ezek után megvizsgálom, hogy az egyensúlyi árvektor mellett miként alakul a kibocsátások vektora. Ehhez bevezetem az $y_i(\mathbf{p})$ értékek alkotta $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (y_1(\mathbf{p}), y_2(\mathbf{p}), \ldots, y_N(\mathbf{p}))^\mathsf{T}$ vektort. A további kalkulációk érdekében vegyük figyelembe a (4.35a) egyenletet, amely alapján az írható, hogy

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{BG1}_{N-M} + \epsilon\mathbf{BB}^\mathsf{T}\mathbf{p} - \epsilon\widetilde{\mathbf{B}}\mathbf{p} = \mathbf{BG1}_{N-M} + \epsilon(\mathbf{BB}^\mathsf{T} - \widetilde{\mathbf{B}})\mathbf{p} \tag{4.97}$$

Behelyettesítem a (4.42) egyensúlyi árvektor explicit alakját a (4.97) egyenletbe. Ezt követően a $\mathbf{Q}$ mátrix definícióját felhasználva: $\mathbf{BB}^\mathsf{T} - \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{C} - \mathbf{Q}$. Mindezek alapján némi átalakítást végezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{BG1}_{N-M} + (\mathbf{C} - \mathbf{Q})\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{BG1}_{N-M} + \frac{\epsilon\omega}{\alpha}\mathbf{C1}_M\right) \tag{4.98}$$

Egyszerűsítés után követően kijön, hogy

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \epsilon\mathbf{C}\left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} - \frac{\omega}{\alpha}\mathbf{1}_M\right) = \epsilon\mathbf{C}\left(\phi^{\mathrm{dom}}\left\langle\mathbf{c}, \mathbf{v}^{\mathrm{dom}}\right\rangle\mathbf{v}^{\mathrm{dom}} + \mathbf{p}^R - \frac{\omega}{\alpha}\mathbf{1}_M\right) \tag{4.99}$$

Ez viszont egyenértékű az alábbi tömörebb kifejezéssel:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \epsilon\mathbf{C}\left(\mathbf{p} - \frac{\omega}{\alpha}\mathbf{1}_M\right), \tag{4.100}$$

ahol $\mathbf{p} - (\omega/\alpha)\mathbf{1}_M$ az árrésvektor.

Tehát az egyensúlyi kibocsátások szempontjából a domináns sajátvektor, a reziduális tag és az ω/α határköltség mellett a $\mathbf{C}$ mátrix elemeinek is szerepe van. Emlékezzünk arra, hogy $\mathbf{C}$ főátlójának i-edik eleme $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$. Vagyis azt mondhatjuk, hogy az i-edik szereplőnek való kitettség hatással van $y_i(\mathbf{p})$ értékére.

Nézzük meg, hogy mi a helyzet abban az esetben, ha az egyes fogyasztók azonos számú termelővel állnak kapcsolatban. Hogyan alakul ekkor az egyensúlyi kibocsátás? Ahhoz, hogy erre válaszoljak, egy tételt mondok ki.

4.8. Tétel. *Ha minden fogyasztó ugyanannyi termékvariánst fogyaszt, akkor az egyedi, termelői kibocsátások pontosan akkor egyenlők, ha* $\mathbf{C}$ *diagonálisának elemei megegyeznek.*

Bizonyítás. Ha az egyes fogyasztók ugyanannyi termékváltozatot fogyasztanak, akkor a 4. Következmény miatt az árak homogének. Vagyis (4.100) következtében a kibocsátásvektor koordinátái csak $\mathbf{C}$-től függenek. Ha utóbbi főátlójának elemei azonosak, akkor a kibocsátások homogének. Megfordítva, az is egyszerűen látható, hogy ha a kibocsátások homogének, akkor $\mathbf{C}$ főátlóbeli elemei szükségképpen megegyeznek. ■

6. Következmény. *Amennyiben feltételezzük, hogy minden egyes fogyasztó ugyanannyi*

termékvariánst vásárol és az egyedi fogyasztásuk azonos, tehát $d_j^C = d$ *és* $\gamma_j = \gamma$ *tetszőleges* j *fogyasztóra igaz, akkor annak a termelőnek magasabb az egyensúlyi kibocsátása, amelyikkel több fogyasztó áll kapcsolatban. Ha ugyanis* d_i^P *fogyasztó vásárol az i-edik termelőtől, akkor* $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = (d_i^P/d)(1-1/d)$. *A* (4.100) *képlet felhasználásával*

$$y_i(\mathbf{p}) = \frac{\epsilon d_i^P}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)\left(p-\frac{\omega}{\alpha}\right), i = 1, 2, \ldots, M, \tag{4.101}$$

hiszen a 4. Következmény miatt tudjuk, hogy az árak homogének. Vagyis az $y_i(\mathbf{p})$ *egyensúlyi kibocsátás értéke annál nagyobb, minél több fogyasztó vásárol az i-edik termelőtől. Továbbá, ha az egyes termelőkkel azonos számú fogyasztó van kapcsolatban (lehetséges megadni ilyen struktúrát), akkor az egyedi, termelői kibocsátások megegyeznek.*

Ezt követően megvizsgálom a nyereség alakulását, fenntartva az iménti következmény feltételezéseit. A korábbiakból ismert, hogy a nyereség $\pi_i(\mathbf{p}) = (p-\omega/\alpha)y_i(\mathbf{p})$ módon számítható ki. Következésképpen egy adott egyensúlyi nyereségérték annál magasabb, minél nagyobb az egyensúlyi kibocsátás értéke, pontosabban, az a termelő realizál magasabb nyereséget, amelyiktől több fogyasztó vásárol. A (4.101) egyenlet jobb oldalán található kifejezést az imént megadott nyereségfüggvénybe helyettesítve az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\pi_i(\mathbf{p}) = \frac{\epsilon d_i^P}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)\left(p-\frac{\omega}{\alpha}\right)^2, i = 1, 2, \ldots, M \tag{4.102}$$

A mostani alfejezet zárásaként két numerikus példát vizsgálok meg. A számolás részleteitől itt is eltekintek azok egyszerűsége miatt, így csak a mondanivaló szempontjából lényeges végeredményeket közölöm. A példákban elsősorban a $\mathbf{C}$ mátrix és az $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ egyensúlyi kibocsátásvektor meghatározása a célom, hiszen amint az fentebb látható volt, az előbbi mátrix fontos szerepet tölt be az egysúlyi kibocsátok kiszámításában, azok alakulásában. A kalkulációt illetően, ahol azt lényegesnek tartom, számításaim eredményét két tizedesjegyre kerekített tizedestört alakban is felírom.

5. Példa. Az 1. Példa kapcsolati mátrixát, paraméterértékeit ($\alpha = 0{,}3$, $\epsilon = 10$, $\omega = 3$, $\gamma_j = 1$ minden j-re) és releváns eredményeit felhasználva kiszámítom az $\mathbf{y}$ egyensúlyi kibocsátásvektort.

Ehhez először a $\mathbf{C}$ mátrixot határozom meg:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

Az egyensúlyi kibocsátásvektor pedig:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{297}{208} \\ \frac{56}{39} \\ \frac{56}{39} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}43 \\ 1{,}44 \\ 1{,}44 \end{bmatrix}$$

Nézzünk még egy példát abból a célból, hogy numerikusan is megvizsgálhassuk a **C** mátrix elmeinek hatását az $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ egyensúlyi kibocsátásvektor koordinátái tekintetében. Az 1. Példa paraméterértékeit ($\alpha = 0{,}3$, $\epsilon = 10$, $\omega = 3$, $\gamma_j = 1$ minden j-re) használom az alábbiakban, azonban a kapcsolati mátrixot megváltoztatom. Az **A** mátrix méreteit tekintve 4×12-es, melynek második sora csupa egyes, a többi sorában azonban találhatók nullák is. Ez azt jelenti, hogy a második számú termelő domináns, hiszen tőle minden egyes fogyasztó vásárol. Megjegyzem továbbá, hogy ahol lényegesnek gondolom, a végeredmények könnyebb értelmezhetősége érdekében azokat két tizedesjegyre kerekített tizedestört alakban is felírom.

6. Példa. Amint utaltam rá, ebben a példában nem az előző kalkulációk kapcsolati mátrixát használom. Ez lehetőséget ad a korábbi, megfelelő eredményekkel való összevetésre. Ezenkívül a vonatkozó elméleti megállapításaim is érthetőbbé válnak.

Ebben a példában figyelembe vett **A** kapcsolati mátrix az alábbi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az ezt követő lépésben kiszámítom a **C** mátrix elemeit, valamint az egyensúlyi árvektort is:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{25}{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{103}{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{9} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}86 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}11 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{3814}{375} \\ \frac{1028}{101} \\ \frac{937}{92} \\ \frac{1809}{178} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}17 \\ 10{,}18 \\ 10{,}18 \\ 10{,}16 \end{bmatrix}$$

Az egyensúlyi kibocsátásvektor pedig a következő:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{4205}{1774} \\ \\ \frac{668}{131} \\ \\ \frac{1001}{368} \\ \\ \frac{773}{427} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}37 \\ \\ 5{,}10 \\ \\ 2{,}72 \\ \\ 1{,}81 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az egyensúlyi termékárak meglehetősen közel esnek egymáshoz, így a mark-up-vektor elemei relatíve közel lesznek. Azonban a kibocsátások közti különbség már jóval jelentősebb, hiszen **C** diagonálisában álló számok közti különbség a viszonylag kis különbségeket felnagyítja. Megjegyzem, hogy a szimulációk kapcsán ismételten látható lesz a jelentősebb kibocsátásbeli heterogenitás.

4.5.1. Kiegészítő megjegyzés: fontos kiegészítés a kapcsolati mátrixhoz

Ez az egység szerves részét képezi a jelenlegi alfejezetnek. Ebben azt fogom demonstrálni, hogy miért szükséges annak a feltételezése, miszerint minden fogyasztó legalább két termékváltozatot vásárol. Ez a vizsgálódás tehát a kapcsolati mátrix egyik legfontosabb peremfeltételét vizsgálja. Kimutatom, hogy amennyiben az említett feltevés nem teljesül, akkor megadható olyan szituáció, amely problémához vezet. Nevezetesen lesz az egyensúlyi egyedi keresett mennyiségek között olyan, amely negatív értéket vesz fel. Ennek érdekében az alábbiakban kisebb-nagyobb részletességgel egy hosszadalmasabb számolást igénylő példát vezetek végig, amelyben egyetlen domináns termelő és fogyasztó van, viszont nem teljesül, hogy minden vevő legalább két eltérő termékváltozatot vásárol.

Vegyük azt az **A** kapcsolati mátrixot, amelynek első sora és első oszlopa csupa egyesből áll, a többi eleme azonban zérus ($a_{1j} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$, $a_{i1} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, M$ és $a_{ij} = 0$, ha $i, j \geq 2$). Az alábbiakban a fentebb már ismertetett Sherman–Morrison-formula révén kiszámítom a **Q** mátrix inverzét, feltéve, hogy az létezik. Ehhez segítségül hívom az alábbi mátrixokat:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = (N - M - 1)\mathbf{J}_M^{11} + \frac{1}{M}\mathbf{I}_M \tag{4.103a}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{M}\left(1 - \frac{1}{M}\right)\mathbf{I}_M \tag{4.103b}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = (N - M - 1)\mathbf{J}_M^{11} + \frac{1}{M^2}\mathbf{J}_M, \tag{4.103c}$$

ahol $\mathbf{J}_M^{11}$ azt az $M \times M$-es mátrixot jelöli, amely első sorának első eleme egy, a többi pedig nulla. Ugyanis $b_{1j} = 1$ ($j = 2, 3, \ldots, N - M$), $b_{i1} = 1/M$ ($i = 1, 2, \ldots, M$) és $b_{ij} = 0$, ha $i, j \geq 2$. Ennek megfelelően ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} = (N - M - 1)\delta_{i1} + \frac{1}{M} \tag{4.104a}$$

$$\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij}) = \frac{1}{M}\left(1 - \frac{1}{M}\right), \tag{4.104b}$$

ahol δ_{i1} a Kronecker-delta, amely az $i = 1$ esetben egy, egyébként nulla.

Következésképpen $\mathbf{Q}$ mátrix definíciója miatt:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{M}\left[\left(2 - \frac{1}{M}\right)\mathbf{I}_M - \frac{1}{M}\mathbf{J}_M\right] \tag{4.105}$$

Mivel azonban $\mathbf{J}_M = \mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^\top$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{-1} &= M\left[\left(2 - \frac{1}{M}\right)\mathbf{I}_M - \frac{1}{M}\mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^\top\right]^{-1} = \frac{M}{2M-1}\mathbf{I}_M + \frac{\frac{M}{2M-1}\mathbf{I}_M\frac{1}{M}\mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^\top\frac{M}{2M-1}\mathbf{I}_M}{1 - \frac{1}{M}\mathbf{1}_M^\top\frac{M}{2M-1}\mathbf{I}_M\mathbf{1}_M} \\ &= \frac{M^2}{2M-1}\left(\mathbf{I}_M + \frac{1}{M-1}\mathbf{J}_M\right)\end{aligned} \tag{4.106}$$

Az felírt inverz pontosan akkor létezik, ha $M \geq 2$.

Az egyensúlyi árvektor meghatározásához szükséges még a $\mathbf{c}$ vektor ismerete. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\gamma_j = \gamma$ ($j = 1, 2, \ldots, N - M$). Ekkor a $\mathbf{c}$ vektort kiszámítva azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{c} = \frac{(N - M - 1)\gamma}{\epsilon}\mathbf{e}_M^1 + \frac{1}{M}\left[\gamma + \frac{\omega}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{M}\right)\right]\mathbf{1}_M, \tag{4.107}$$

ahol $\mathbf{e}_M^1$ az első egységvektor. Figyelembe véve $\mathbf{Q}$ inverzének szerkezetét, levonható a következtetés, hogy az első termelő ára lesz a legmagasabb, a többiek viszont azonos egyensúlyi árakat állapítanak meg.

Ezek után lássuk az alábbi különbséget ($i \neq 1$), amely elengedhetetlen egyes egyedi keresett mennyiségek meghatározásához:

$$p_1 - p_i = \frac{\gamma M^2(N - M - 1)}{\epsilon(2M - 1)}, \tag{4.108}$$

hiszen $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{1}_M$ minden eleme azonos és $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_M^1$ a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix első oszlopát veszi ki. Következésképpen, ha $N - M > 1$ teljesül, továbbá az egyes szereplők száma vagy az

egyedi fogyasztás elegendően magas, akkor releváns árdiszperziót tapasztalunk.

Most rátérek a kibocsátásokra, amelyhez az egyedi keresett mennyiségeket kell kiszámítani. Egyszerűen belátható, hogy $x_{1j}(\mathbf{p}) = \gamma$ és $x_{ij}(\mathbf{p}) = 0$, ahol $i, j \geq 2$. Bevezetve a $\Delta p_1 = p_1 - p_i$ jelölést ($i \neq 1$), a részletek ismertetése nélkül kiszámítható, hogy

$$x_{11}(\mathbf{p}) = \frac{1}{M}\left(\gamma - \frac{\epsilon \Delta p_1 (M-1)}{M}\right) \tag{4.109a}$$

$$x_{i1}(\mathbf{p}) = \frac{1}{M}\left(\gamma + \frac{\epsilon \Delta p_1}{M}\right), i = 2, 3, \ldots, M \tag{4.109b}$$

Ahhoz, hogy az $x_{11}(\mathbf{p}) \geq 0$ kívánalom teljesüljön, fel kell tételezni a $\gamma \geq \epsilon \Delta p_1 (M-1)/M$ egyenlőtlenség teljesülését, amely az $2M - 1 \geq (M-1)M(N-M-1)$ egyenlőtlenséggel egyenértékű. Ha azonban $M = 3$ és $N = 5$, akkor az $5 \geq 6$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami ellentmondás. A vizsgált egyenlőtlenség egyedül az $M = 2$, $N = 4$ esetben teljesül. Ez viszont nagyon szűkös piaci szerkezetek modellezését teszi csak lehetővé. Következésképpen sikerült igazolni, hogy a $d_j \geq 2$ feltevés indokolt minden lehetséges j-re.

4.6. *További illusztratív példák*

Ebben az alfejezetben az alapmodell eddigi elméleti részeinek illusztrálásához újabb példákat hívok segítségül. A konkrét számításokat MATLAB segítségével végzem el. A példákban olyan szituációkat elemzek, amelyekben viszonylag kevés termelő és fogyasztó van, tehát az $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrix kisméretű. Megjegyzem továbbá, hogy a konkrét számszerű eredményeken túl olyan gráfokat is szerepeltetek, amelyek elkészítéséhez a 4.4. alfejezetben definiált $\mathbf{A}_W$ – termelői viszonyrendszert reprezentáló – súlyozott kapcsolati mátrixot veszem figyelembe. Így az egyes struktúrák grafikusan is láthatók lesznek.

A szóban forgó súlyozott gráfoknál a közvetett hálózati hatásokat szaggatott élekkel érzékeltetem. Ennek az alfejezetnek minden példájában az 1. Példa paraméterértékeit ($\alpha = 0{,}3$, $\epsilon = 10$, $\omega = 3$, $\gamma_j = 1$ minden j-re) veszem alapul, kivéve az M és N paramétereknél, amelyeknél az $M = 4$ és $N = 10$ választással élek. Számításaim eredményét általában tört alakban adom meg, és ahol a könnyebb értelmezhetőség érdekében szükségesnek gondolom, ott az adott értékeket két tizedesjegyre kerekített tizedestört alakban is feltüntetem.

Emlékeztetnék arra, hogy a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrixot megadhatjuk a $\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{V}^n$ összeggel. Ennek a birtokában „visszafejthető” a (4.68) összeg, hiszen pontosan ez alapján adhatók meg az ábrázolni kívánt súlyozott gráf élsúlyai, amelyek a közvetlen és közvetett hálózati hatások mértéke szempontjából elengedhetetlenek. Emlékeztetek arra is, hogy az iménti összegben szereplő $\mathbf{V}$ mátrix a következő alakot ölti: $\mathbf{V} = \mathbf{I}_4 - \kappa \mathbf{Q}$. A $\mathbf{V}$ mátrix teszi

ugyanis lehetővé annak meghatározását, hogy két termelő között van-e közvetlen kapcsolat vagy sincs. Utóbbi eldöntése érdekében annak a megállapítása szükséges, hogy a **V** megfelelő eleme zérustól különbözik-e vagy sem – ezt a κ értékének megválasztása nem befolyásolja.

Összesen öt számpéldát mutatok be. Ezek sajátosságait külön-külön ismertetem. Példáim közül a 7. Példa referenciának tekinthető, amellyel a további példákat vetem majd össze. Ennek referencia-jellegét a specialitása indokolja, mert a mögöttes interakciós hálózati szerkezet egy teljes gráffal reprezentálható. A fennmaradó négy példában módosítom az iménti kapcsolati mátrixot. Az első módosításnál nagyjából hasonlók lesznek a termelői erőviszonyok, a másodiknál feltételezem egy domináns termelő jelenlétét (a mátrix első sorának minden eleme egyes), a harmadikánál egy domináns fogyasztóval számolok (a mátrix első oszlopának minden eleme egyes), az utolsónál pedig lesz egy domináns termelő és fogyasztó is. Ezek a módosítások a termelői pozíció szempontjából alkalmasak kisméretű elemzések készítésére. Ahogy arra fentebb már utaltam, kiderül, hogy a piaci pozíció nem feltétlenül releváns az árheterogenitás vonatkozásában. Ez a helyzet akkor sem lesz jobb, ha nincs a piacon igazán domináns szereplő. Ha azonban egyszerre van jelen domináns termelő és fogyasztó is, akkor már tapasztalható jelentősebb áreltérés. Az árheterogenitás mellett az egyensúlyi kibocsátásokat is elemzem, és kimutatom, hogy a **C** mátrix főátlójában lévő elemekkel való arányosság nem feltétlenül teljesül.

7. Példa. Lássuk most a referencia-példát, amely esetben az interakciós hálózati szerkezetet reprezentáló gráf teljes, így az egyes fogyasztók minden termésvariánsból vásárolnak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix az alábbi értékeket tartalmazza:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{32}{63} & \frac{8}{63} & \frac{8}{63} & \frac{8}{63} \\ \frac{8}{63} & \frac{32}{63} & \frac{8}{63} & \frac{8}{63} \\ \frac{8}{63} & \frac{8}{63} & \frac{32}{63} & \frac{8}{63} \\ \frac{8}{63} & \frac{8}{63} & \frac{8}{63} & \frac{32}{63} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}51 & 0{,}13 & 0{,}13 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}51 & 0{,}13 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}13 & 0{,}51 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}13 & 0{,}13 & 0{,}51 \end{bmatrix}$$

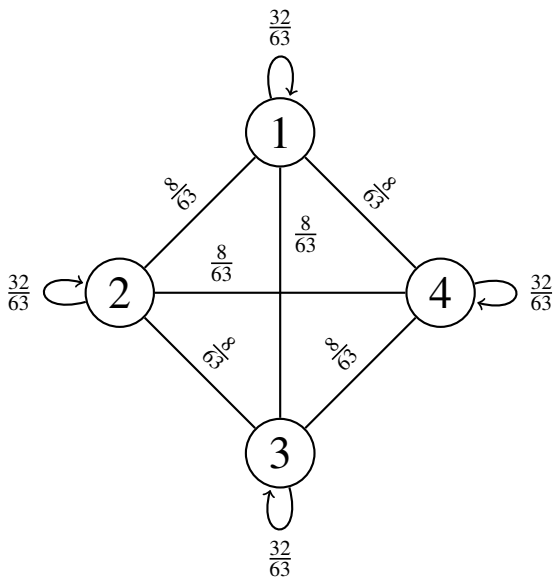
A **C** diagonális mátrix a következő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

A **p** és **y**(**p**) egyensúlyi ár- és kibocsátásvektorok pedig az alábbiak:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{152}{15} \\ \frac{152}{15} \\ \frac{152}{15} \\ \frac{152}{15} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}13 \\ 10{,}13 \\ 10{,}13 \\ 10{,}13 \end{bmatrix}, \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

4.2. ábra. Első gráfreprezentáció



8. Példa. Ebben a példában tekintsünk egy viszonylag „ritka” kapcsolati mátrixot. A „ritkaság” mellett lényeges még, hogy a referencia-példa **A** mátrixsza úgy módosul, amelynek eredményeként nem lesz jelen a gazdaságban domináns termelő vagy fogyasztó.

Mindezek után, legyen a kapcsolati mátrix az alábbi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix az alábbi lesz:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{688}{889} & \frac{164}{889} & \frac{204}{889} & \frac{92}{889} \\ \frac{164}{889} & \frac{680}{889} & \frac{152}{889} & \frac{208}{889} \\ \frac{204}{889} & \frac{152}{889} & \frac{536}{889} & \frac{172}{889} \\ \frac{92}{889} & \frac{208}{889} & \frac{172}{889} & \frac{984}{889} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}77 & 0{,}18 & 0{,}23 & 0{,}10 \\ 0{,}18 & 0{,}76 & 0{,}17 & 0{,}23 \\ 0{,}23 & 0{,}17 & 0{,}60 & 0{,}19 \\ 0{,}10 & 0{,}23 & 0{,}19 & 1{,}11 \end{bmatrix}$$

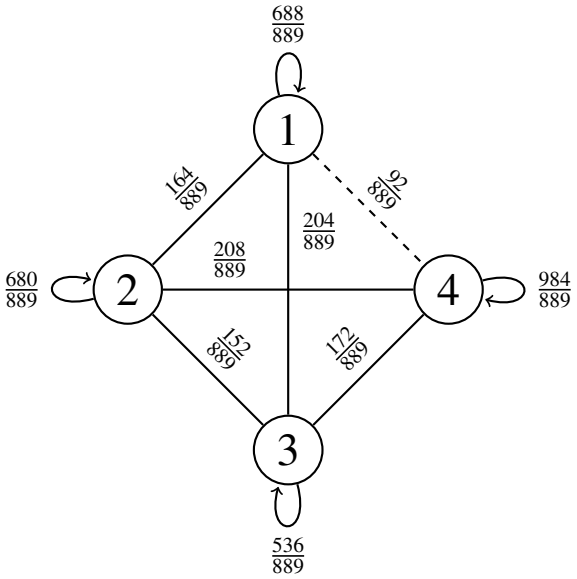
A $\mathbf{C}$ diagonális mátrix a következő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ egyensúlyi ár- és kibocsátásvektorok pedig az alábbiak:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{51}{5} \\ \frac{51}{5} \\ \frac{51}{5} \\ \frac{51}{5} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}2 \\ 10{,}2 \\ 10{,}2 \\ 10{,}2 \end{bmatrix}, \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.3. ábra. Második gráfreprezentáció



Látható, hogy az árak azonosak, de magasabbak, mint a referencia-példánál. Az árazonosságot a 4. Következmény magyarázza: $\gamma d/[\epsilon(d-1)] = 1/5$, mert $d = 2$. Továbbá az egyensúlyi kibocsátások arányosak a **C** mátrix megfelelő főátlóbeli elemeivel.

9. Példa. Ebben a példában egy olyan interakciós hálózati szerkezetet nézek, amelyben **A** mátrixnak van csupa egyesből álló sora (domináns termelői pozíció):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix az alábbiak szerint alakul:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{473}{1068} & \frac{473}{2136} & \frac{253}{1310} & \frac{399}{1973} \\ \frac{473}{2136} & \frac{632}{569} & \frac{253}{2620} & \frac{399}{3946} \\ \frac{253}{1310} & \frac{253}{2620} & \frac{2189}{1899} & \frac{742}{4335} \\ \frac{399}{1973} & \frac{399}{3946} & \frac{742}{4355} & \frac{1472}{1861} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}44 & 0{,}22 & 0{,}19 & 0{,}20 \\ 0{,}22 & 1{,}11 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}19 & 0{,}10 & 1{,}15 & 0{,}17 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}79 \end{bmatrix}$$

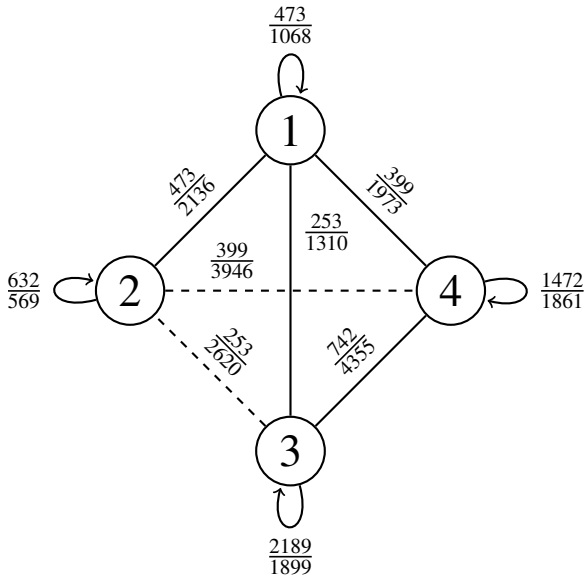
A **C** diagonális mátrix a következő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{53}{36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{18} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}72 \end{bmatrix}$$

A **p** és **y**(**p**) egyensúlyi ár- és kibocsátásvektorok pedig az alábbiak:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{2405}{236} \\ \frac{2192}{215} \\ \frac{2780}{273} \\ \frac{2995}{294} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}19 \\ 10{,}20 \\ 10{,}18 \\ 10{,}19 \end{bmatrix}, \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{1763}{628} \\ \frac{797}{816} \\ \frac{941}{1088} \\ \frac{2082}{1541} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}81 \\ 0{,}98 \\ 0{,}86 \\ 1{,}35 \end{bmatrix}$$

4.4. ábra. Harmadik gráfreprezentáció



Az egyensúlyi árak heterogenitása alacsony, de az árak a referencia-példához képest magasabbak. Az egyensúlyi kibocsátás a domináns termelőnél a legnagyobb, mert tőle vásárolnak a legtöbben, és a kibocsátások közel arányosak **C** főátlójának elemeivel.

10. Példa. Utolsó előtti példaként nézzünk egy domináns fogyasztót tartalmazó szituációt

(a kapcsolati mátrix első oszlopa csak egyesből áll):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix az alábbi lesz:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{320}{391} & \frac{16}{85} & \frac{16}{85} & \frac{48}{391} \\ \frac{16}{85} & \frac{481}{771} & \frac{496}{2975} & \frac{16}{85} \\ \frac{16}{85} & \frac{496}{2975} & \frac{481}{771} & \frac{16}{85} \\ \frac{48}{391} & \frac{16}{85} & \frac{16}{85} & \frac{320}{391} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}82 & 0{,}19 & 0{,}19 & 0{,}12 \\ 0{,}19 & 0{,}62 & 0{,}17 & 0{,}19 \\ 0{,}19 & 0{,}17 & 0{,}62 & 0{,}19 \\ 0{,}12 & 0{,}19 & 0{,}19 & 0{,}82 \end{bmatrix}$$

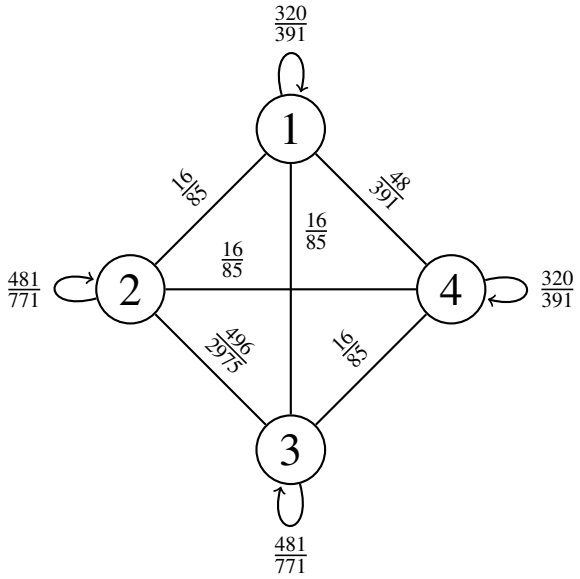
A $\mathbf{C}$ diagonális mátrix a következő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{16} \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ egyensúlyi ár- és kibocsátásvektorok pedig az alábbiak:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{4328}{425} \\ \frac{3351}{329} \\ \frac{3351}{329} \\ \frac{4328}{425} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}18 \\ 10{,}19 \\ 10{,}19 \\ 10{,}18 \end{bmatrix}, \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{429}{340} \\ \frac{591}{340} \\ \frac{591}{340} \\ \frac{429}{340} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}26 \\ 1{,}74 \\ 1{,}74 \\ 1{,}26 \end{bmatrix}$$

4.5. ábra. Negyedik gráfreprezentáció



Ennél a példánál lényegében ugyanazok mondhatók el, mint az előzőnél. Tehát sem a domináns termelő, sem a domináns fogyasztó nem képes jelentős árdiszperziót generálni. Megjegyzendő még, hogy az egyensúlyi kibocsátások szerkezetét viszonylag jól visszatükrözik a **C** mátrix főátlójának elemei.

11. Példa. Az utolsó példában a gazdaságban egyszerre van jelen domináns termelő és fogyasztó is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}^{-1}$ inverzmátrix az alábbi lesz:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{535}{1332} & \frac{499}{2490} & \frac{499}{2490} & \frac{461}{2450} \\ \frac{499}{2490} & \frac{2831}{3447} & \frac{465}{3701} & \frac{349}{2507} \\ \frac{499}{2490} & \frac{465}{3701} & \frac{2831}{3447} & \frac{349}{2507} \\ \frac{461}{2450} & \frac{349}{2507} & \frac{349}{2507} & \frac{230}{187} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}19 \\ 0{,}20 & 0{,}82 & 0{,}13 & 0{,}14 \\ 0{,}20 & 0{,}13 & 0{,}82 & 0{,}14 \\ 0{,}19 & 0{,}14 & 0{,}14 & 1{,}23 \end{bmatrix}$$

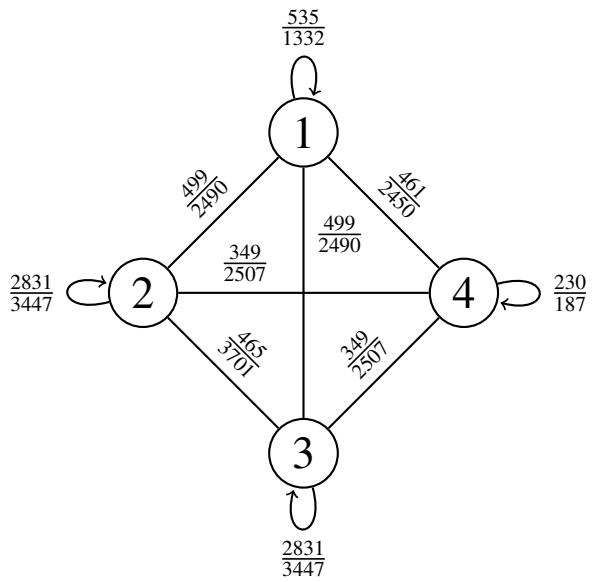
A **C** diagonális mátrix a következő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{23}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

A **p** és **y**(**p**) egyensúlyi ár- és kibocsátásvektorok pedig az alábbiak:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{1416}{139} \\ \frac{886}{87} \\ \frac{886}{87} \\ \frac{4896}{481} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 10{,}19 \\ 10{,}18 \\ 10{,}18 \\ 10{,}18 \end{bmatrix}, \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{3829}{1424} \\ \frac{416}{329} \\ \frac{416}{329} \\ \frac{2895}{3701} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}69 \\ 1{,}26 \\ 1{,}26 \\ 0{,}78 \end{bmatrix}$$

4.6. ábra. Ötödik gráfreprezentáció



A példa alapján a termelői és fogyasztói dominancia együttes megléte sem elegendő ahhoz, hogy érdemi árheterogenitást tapasztaljunk. Az árak ebben az esetben is elmaradnak a referencia-példa egyensúlyi áraitól. A **C** mátrix jelen példában is jól leképezi az egyensúlyi kibocsátásokat, a fogyasztó oldali aszimmetria ebben nem okozott torzulást.

Az előzőekben bemutatott számpéldák a korábbi egységek gyakorlatához hasonlósan viszonylag egyszerűek, könnyen áttekinthetők voltak. Olyan piaci szituációkat ismertettek, amelyekben a szereplők száma relatíve alacsony volt. Mégis e példák mérete alkalmas volt arra, hogy az alapmodell bizonyos további jellegzetességeire rávilágítson. Következésképpen a számpéldák viszonylag kis mérete ellenére elméleti szempontból mégsem lebecsülendők.

Ugyan ezek a kalkulációk és a kapcsolódó gráfreprezentációk (4.6–4.6. ábrák) segítettek abban, hogy az alapmodell jobban érthető legyen, mégis számos kérdést hagytak nyitva. Ezért a pontosabb összkép érdekében vélhetően jóval több és jelentősen nagyobb méretű példákat kellene megvizsgálni, azonban ez már csak szimulációk útján lehetséges. Következésképpen szükség van egy olyan egységre, amelyben a szimulációk szerepe elsődleges. Emiatt erre a következő fejezetben egy külön alfejezetet szánok.

5. Alternatív modellek, kiegészítő szimulációk és empirikus hálózatbecslés

A szakirodalmi áttekintés, majd az azt követő hangsúlyozottan is elméleti fejezet után, ebben a teoretikus elemekben szintén bővelkedő fejezetben arányait tekintve nagyobb mértékben kap teret a modellalkalmazás. Összefoglalva az eddigieket: egy játék- és hálózatelméleti keretek között vizsgált alapmodell tekintetében beláttam az egyensúlyi árvektor létezését, egyértelműségét és nemnegatív voltát. Emellett az egyensúlyi ár- és kibocsátásvektor tekintetében igazoltam, hogy azok az absztrakt piacszerkezettel szemben támasztott legfontosabb feltételek (nemnegatív árak és egyedi keresett mennyiségek) eleget tesznek. Végül az elméleti rész hangsúlyos eleme volt a struktúraelemzés, nevezetesen a piaci pozíció egyensúlyi árakra gyakorolt hatásának vizsgálata. Az ilyen irányú vizsgálódások során számos konkrét példát is bemutattam.

Mindezt kiegészítve, ennek a fejezetnek az első, tartalmilag szorosabban összefüggő egységében, a korábban már részletesen bemutatott és analizált alapmodellt variálom, és újabb modellváltozatokat mutatok be. Célom néhány olyan irány demonstrálása, amely bizonyos szempontból általánosítást jelent a fentiekhez képest. Fontos azonban megjegyeznem, hogy a szóban forgó modellvariációk nem feltétlenül tekinthetők modellkiterjesztéseknek. Hogy ez alatt pontosan mire gondolok, az a konkrét esetekben lesz igazán nyilvánvaló. Amely modelleknél azt lényegesnek tartom, kitérek annak a vázlatos bemutatására, hogy az alapmodell egyes lényegi tulajdonságai (ilyen az egyensúlyi árvektor létezése, unicitása, vagy például az egyedi keresett mennyiségek nemnegativitása) vajon teljesülnek-e.

A modellvariációkat illetően, három, általam fontosnak gondolt modellvázlat ismertetésére vállalkozom. Ezek felépítésénél, vizsgálatánál viszont nem járok el az alapmodell elemzése során tanúsított részletességgel.[23] Utóbbi többek között abban nyilvánul meg, hogy mélyreható levezetésekbe nem feltétlenül megyek bele, kivéve akkor, ha megítélésem szerint ez jelentőséggel bír. Annak taglalását sem tartom indokoltnak, hogy mely eredmények maradnak érvényben az adekvát módosításokat elvégezve, hiszen mindez nem elsődleges célja a dolgozatnak, sőt a terjedelmi szempontok sem teszik ezt lehetővé.[24] Ahol szükséges, közgazdasági értelmezést fűzök a kapott eredményekhez, hiszen

[23] Ez azt is jelenti, hogy ha kifejezett módon nem jelezem, az alapvető jelölések, a módosítások szempontjából releváns feltevések (például piactisztítás), definíciók (például absztrakt piacszerkezet) változatlanok maradnak – esetleg megfelelően módosulnak –, és lényegét tekintve a (4.23) probléma sem változik.

[24] Az említettektől függetlenül kifejezetten hasznos lenne az aprólékosabb levezetés, beleértve annak

alapvetően az interpretáció teszi teljessé elemzésemet.

A modellvariációk ismertetését követő alfejezetekben folytatom az egyensúlyi árak illetve kibocsátások heterogenitásának, továbbá az említett egyensúlyi értékek piaci pozícióval való kapcsolatának analízisét. Ennek révén, egyrészt, az elméleti eredményeket kívánom elmélyíteni, másrészt, válaszolni szeretnék a bevezetésben felvetett második és harmadik kutatási kérdésre is.

Munkámnak a szóban forgó szakaszában MATLAB segítségével modellfuttatások két, megközelítését tekintve eltérő kategóriáját különítem el. A szoftver által adott eredményeket, ábrákat külön alfejezetekben közlöm.[25] Első esetben az egyensúlyi árakat és kibocsátásokat érintő szimulációkat futtatok, míg a másodikban kalibrációt hajtok végre, de itt már kifejezetten csak az áreloszlást tartom szem előtt. A további szükséges részleteket az egyes alfejezetekben közölöm. Ezek az eredmények, számítások azért fontosak, mert általuk a fenti alapvetően teoretikus modell mélyebben megismerhetővé válik, továbbá az empirikus vetülete is kidomborodik. Ennél azonban többről van szó. A korábbi elméleti egységekben már született egyfajta magyarázat az egyensúlyi értékek heterogenitására a hálózati szerkezet révén. Mindezt tekintetbe véve, egyrészt felvethető, hogy a megfigyelt egyensúlyi értékek milyen kapcsolatban vannak egymással, azok relevánsnak tekinthető heterogenitása egy adott típusú interakciós hálózati struktúra mellett milyen paraméter-választás esetén áll elő? Ezenkívül leptokurtikusak-e az egyensúlyi értékekből képzett eloszlások? Másrészt figyelembe véve egy megfigyelt heterogenitást (konkrét áradatok heterogenitását), mi az a közvetlenül nem megfigyelhető hálózati szerkezet, amely a többi paraméter adottsága mellett kalibrációs eljárás révén adódik? Utóbbi kérdés megválaszolása azért is különösen fontos, mert az növelheti a bemutatott modell gyakorlati értékét, rámutatva az alkalmazhatóság egy bizonyos aspektusára.

Megjegyzem, hogy a szimulációk során semmiféle empirikus adatbázisra sem támaszkodom, ezért az eredmények újabb – de nagyobb méretű – numerikus illusztrációknak tekinthetők. A kalibrációs szakaszban azonban eltérő megközelítésben vizsgálódom. Ennek során konkrét adatok birtokában igyekszem következtetni a mögöttes interakciós hálózati struktúrára. A szimulációs és kalibrációs blokk előfeltételezi, hogy a fentiekben bemutatott modellek – legalábbis bizonyos mértékben – valósághűek. Megemlítendő továbbá mindkét alfejezet (5.4–5.5.) eredményei szempontjából, hogy azokból általános következtetések nem vonhatók le. Ugyanis mindkét esetben viszonylag specifikus feltételek mellett végezem el a modellfuttatásokat. A szimulációknál konkrét, a hálózati szerkezetet lényegesen meghatározó paramétereket feltételezve teszem ezt, míg a kalibrációs részben

vizsgálatát is, hogy a B. függelékben található, az egyensúlyi árvektort érintő bizonyítások egyike-másika adaptálható-e a különböző modellkörnyezetekben.

[25] A kódokat a maguk teljességében terjedelmi okokból nem közölöm, de a szükséges mértékben legfontosabb jellemzőikre utalok.

egy jól meghatározott időszak, jól meghatározott piacán vizsgálódom. Utóbbi esetben azonban a bemutatott eljárás ötletet adhat piacok bizonyos hálózati jellemzőinek a feltárásához.

Mindkét alfejezetben ugyanazzal a módszerrel, algoritmussal generálható az (exogén) **A** kapcsolati mátrix. Célom, hogy képes legyek előállítani Erdős–Rényi-típusú illetve skálafüggetlen hálózatokat, sőt valamilyen értelemben ezek kombinációit. Mindezt úgy, hogy külön-külön megadható legyen a termelői vagy fogyasztói oldalú aszimmetria mértéke. Mivel ez az eljárás alapját képezi mind a szimulációnak, mind a kalibrációnak, illetve lehetővé teszi az eredmények jobb megértését, ezért e mátrix generálásának elméleti hátterével külön alfejezetben foglalkozom.

A fentieket összegezve elmondható, hogy az említett résztémák közgazdaságilag több szempontból is relevánsak. Az alternatív modellek azért lényegesek, mert az alapmodellt igyekeznek árnyalni. Teszik mindezt úgy, hogy feloldanak egyes leegyszerűsítő feltevéseket az egyedi keresleti függvényt vagy a termelési függvényt illetően, és ezek egyike vagy másika helyére egy sokkal realisztikusabb függvényt állítanak. A szimulációk azért fontosak, mert túl a teoretikus részek viszonylag általános jellegű megállapításain, nagyméretű és relatíve sok modellfuttatást tartalmazó példákon keresztül vizsgálják az egyensúlyi értékek viselkedését konkrét hálózati szerkezetet feltételezve. Végül, de nem utolsósorban a hálózatbecslés jelentősége abban ragadható meg, hogy empirikus áreloszlás alapján törekszik rekonstruálni látens hálózati paramétereket, vagyis arra próbál következtetni, hogy milyen lehet a termelők és fogyasztók viszonyrendszerének topológiája.

5.1. Első modellváltozat

Ebben az egységben az alapmodell azon általánosítását mutatom be, amikor a termékenként más-más az árérzékenységi paraméter, továbbá termelőnként a munka termelékenységi paramétere és a munkabér is különbözik.[26] E feltevések a korábbi gondolatmenetemet módosíthatják ugyan, és emiatt a szükséges változtatások alaposabb megfontolást igényelhetnek, mégis a jelen fejezet bevezető részében már említettek okán ezek közül csak az általam legfontosabbaknak ítéltekre térek ki.

Az említett változtatások közül megítélésem szerint a leglényegesebbek az egyedi kereslet (4.2) és az egyensúlyi árvektor (4.42) egyenleteit érintik. Az első a következőképpen

[26]Megjegyzem, hogy mindaz, amit az alapmodellnél a munkapiac vonatkozásában leírtam annyiban módosul, hogy az utóbbi nem tökéletesen, hanem inkább monopolisztikusan versenyző. Másrészt életszerűnek gondolom, hogy a munkabérek különbözhetnek egy adott iparágon, részpiacon (mondjuk a gumiabroncsgyártók részpiacán) belül is. Emiatt meglátásom szerint a szóban forgó feltételezés semmiképpen sem irreális.

módosul ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N - M$):

$$x_{ij}(\mathbf{p}) = b_{ij}\left[\gamma_j - \epsilon_i\left(p_i - \overline{p}_j\right)\right], \tag{5.1}$$

amely formula úgy interpretálható, hogy termelőnként eltérő az egyes fogyasztók érzékenységi paramétere. Ezen a pontos fontosnak tartom kiemelni, hogy az egyedi heterogenitás növelése érdekében realisztikusnak tűnik termékenként más-más árérzékenységi paraméter szerepeltetése. Kissé előreszaladva azt is megjegyzem, hogy a mostani módosításnak a későbbiekben soron következő szimulációknál megmutatkozó érdekes következményei is lesznek (lásd 5.4. fejezet).

A következő lépésben vizsgáljuk meg a

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{M} b_{ij}\gamma_j + \overline{p}_j \sum_{i=1}^{M} b_{ij}\epsilon_i - \sum_{i=1}^{M} b_{ij}\epsilon_i p_i, \tag{5.2}$$

összeget, ehhez minden j-re vezessük be az $\overline{\epsilon}_j = \sum_{i=1}^{M} b_{ij}\epsilon_i$ és $\widetilde{p}_j = \sum_{i=1}^{M} b_{ij}\epsilon_i p_i$ kifejezést. Ezek felhasználása az alábbit eredményezi:

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \gamma_j + \overline{\epsilon}_j\overline{p}_j - \widetilde{p}_j,\ j = 1, 2, \ldots, N - M \tag{5.3}$$

Következésképpen az egyes fogyasztók teljes fogyasztása nem feltétlenül lesz konstans. Tehát a termékenként eltérő árérzékenységi paraméter azt eredményezi, hogy a szóban forgó paraméterek változása hatással lehet a fogyasztók viselkedésére, befolyásolva azok teljes fogyasztását. Ez újdonság az alapmodellhez képest, ahol az említett összeg állandó volt. Ennek ellenére az ármérce korábbiakhoz hasonlóan definiálható, ugyanakkor az arányos árnövekedés nem feltétlenül fog arányos csökkenéshez vezetni az egyedi összkeresletek vonatkozásában. Megjegyzendő azonban, hogy abban az esetben, ha az árérzékenységi paraméterek szórása elhanyagolható, a $\overline{\epsilon}_j\overline{p}_j - \widetilde{p}_j$ különbség zérusnak tekinthető, vagyis a jelenlegi vizsgálódásokat illetően lényegét tekintve visszajutunk az alapmodellhez. Hasonló a helyzet, ha az egyensúlyi árak megegyeznek. Ekkor ugyanis szintén a $\sum_{i=1}^{M} x_{ij}(\mathbf{p}) = \gamma_j$ egyenlet adódik tetszőleges j-re. A szóban forgó eset biztosan megvalósul akkor, ha az interakciós hálózati szerkezetet reprezentáló páros gráf teljes.

A (4.35a) egyenlettel analóg módon a kibocsátásvektor jelen modellvariációban is felírható explicit módon:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{BG1}_{N-M} + \mathbf{E}^{-1}(\mathbf{BB}^{\mathsf{T}} - \widetilde{\mathbf{B}})\mathbf{p}, \tag{5.4}$$

amely vektoros alak jelentőségét szeretném külön is kiemelni, hiszen annak fontos szere-

pe van az egyensúlyi árvektor meghatározásában. Maga a levezetés a (4.35a) egyenletéhez hasonlóan elvégezhető.

A továbblépéshez általánosítom a termelési függvényt is. E tekintetben szintén egy lineáris termelési függvényből indulok ki ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$y_i(\mathbf{p}) = \alpha_i h_i, \tag{5.5}$$

ahol természetesen $\alpha_i > 0$ a munka termelékenységi paraméterét jelenti. Ennek értelmezése ugyanaz, mint az alapmodellben. Tehát, ahogy az egység elején jeleztem, a termelékenységi paraméter termelőnként eltér. Ez azt jelenti, hogy ebben a modellváltozatban a hálózati pozíción kívül abban is eltérnek az egyes termelők, hogy a rendelkezésre álló munkaidőt milyen hatékonyan használják fel a termelés során.

A nyereségfüggvényt (4.17) szerint meghatározva, és az előbbieket, valamint a 4.1. Tételt figyelembe véve, az egyensúlyi árvektor:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{EQ})^{-1} \left(\mathbf{BG1}_{N-M} + \mathbf{EUC1}_M\right), \tag{5.6}$$

ahol $\mathbf{E}$ rendre az ϵ_i-ket tartalmazó diagonális mátrix, illetve $\mathbf{U}$ olyan diagonális mátrix, amely főátlójának i-edik eleme ω_i/α_i, megjegyezve, hogy $\omega_i > 0$ az i-edik vállalat által fizetett munkabért jelöli.

Az alapmodell tárgyalásánál lévő levezetések módosítása tekintetében a következőt kell még fontolóra venni. Vajon érvényes marad-e egy olyan gondolatmenet, amelyekben ϵ helyére az ϵ_i paramétert (vektoros alak esetén az $\mathbf{E}$ mátrixot) illetve ω/α helyére az ω_i/α_i hányadost (vektoros alak esetén a $\mathbf{U}$ mátrixot) írjuk? Példának okáért a 4.7. Tétel és annak bizonyítása értelemszerűen módosítható lenne, ha a termelés határ- vagy átlagköltsége az összes termelő tekintetében azonos lenne. Ekkor ugyanis az egyedi keresett mennyiségek nemnegativitásának feltételeként a $p_i \geq \omega_i/\alpha_i$ egyenlőtlenséget kapnánk tetszőleges i-re, ami teljesülne is, hiszen ellenőrizhető, hogy (5.6) i-edik koordinátája kifejezhető

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon_i \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k}{2\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\omega_i}{2\alpha_i} \tag{5.7}$$

alakban. Az imént felhozott eset mutatja, hogy az absztrakt piacszerkezet feltételrendszere teljesülhet. Azonban, ha a szóban forgó költségek nem egyenlők, akkor más a helyzet, ugyanis ez esetben a hivatkozott levezetés „mechanikus” átalakítása már nem szolgáltatja a kívánt eredményt.[27] Annyi mégis állítható, hogy ha az érintett paraméterek egy viszonylag szűk értéktartományban mozognak, az egyedi fogyasztások nemnegatívak maradnak.

[27] Eszerint a szóban forgó eredmény érvényben maradása feltételezi, hogy a munkabér és a termelékenységi paraméter egyenesen arányos, másként, a hatékonyság magasabb bérezéssel jár és viszont.

Fontos része volt az alapmodell vizsgálatának a termelők piaci helyzetének elemzése. Ez lényegében a hagyományos sajátvektor-centralitás egy módosított formája segítségével történt. A jelenlegi modellváltozatban megnézem, hogy ez a centralitási mutató és a kapcsolódó egyensúlyi ár- és kibocsátásvektor hogyan módosul.

Könnyen meggondolhatjuk, hogy az $(\mathbf{EQ})^{-1}$ nemnegatív, szimmetrikus mátrixhoz ugyanaz az $\mathbf{A}_W$ kapcsolati mátrix rendelhető, mint a $\mathbf{Q}^{-1}$ mátrixhoz. Ugyanis az $(\mathbf{EQ})^{-1}$ mátrix egy általános eleme pontosan akkor pozitív, ha a $\mathbf{Q}^{-1}$ mátrixé is az, így a hozzárendelt kapcsolati mátrixban pontosan ugyanott lesznek nullák és egyesek, mint az $\mathbf{A}_W$ mátrixban. Ezért az árvektor dekompozíciója megegyezik az alapmodellnél közöltekkel.

A kibocsátásvektor a korábbiakhoz hasonlóan levezethető:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{C}\left(\phi^{\mathrm{dom}}\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}^{\mathrm{dom}}\rangle \mathbf{v}^{\mathrm{dom}} + \mathbf{p}^R - \mathbf{EU1}_M\right) \tag{5.8}$$

Vagyis a kiegészített modellben is a kibocsátásvektor szempontjából meghatározó a domináns sajátérték és a hozzá tartozó $\mathbf{v}^{\mathrm{dom}}$ sajátvektor. Ezentúl az egyenletben megjelenik $\mathbf{p}^R$ reziduális tag is.

Az előbbi vektoregyenlet pedig átírható a következő, egyszerűbb alakú összefüggéssé:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{EC}\left(\mathbf{p} - \mathbf{U1}_M\right), \tag{5.9}$$

amelyből látszik, hogy a kibocsátások nagysága a hálózati szerkezet által befolyásolt $\mathbf{C}$ mátrix mellett az egyes ϵ_i paraméterektől is függ. E megállapítással végére értem az első modellváltozat vázlatos ismertetésének, és mint látható volt, az alapmodell egyes elemei bizonyos megszorításokkal változatlanok maradnak.

5.2. *További modellváltozatok*

A mostani alfejezetben két modellváltozatot mutatok be. Ebben az alapmodellt az első modellváltozathoz képest némileg eltérő módon alakítom át, bár átfedések így is lesznek. A jelenlegi módosítás lényegesebb feltevései az alábbiak:

1. a fogyasztók egyedi keresleti függvényét (4.2) határozza meg;

2. a munka termelékenysége nem azonos, azaz egy óra alatt más-más termékmennyiséget állítanak elő az egyes termelők;

3. a munkabérek nem azonosak, ez azt jelenti, hogy a munkaidő sem homogén erőforrás, valamint továbbra sincsenek erőforráshiányból fakadó termelési zavarok;

4. mindegyik termelő termelése során a munkaidőn kívül $g_1, g_2, \ldots, g_L$ mennyiségű további erőforrást is felhasznált, ahol $g_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \ldots, L$);

5. az i-edik termelő termelési függvénye az egyes modellváltozatokban rendre: a) olyan homogén függvény, amelynél a $\theta_i \in (0, 1)$ paraméter jelöli a homogenitás fokát ($i = 1, 2, \ldots, M$); b) Leontief-féle termelési függvény határozza meg a termelés folyamatát minden egyes termelőnél.

Egy megjegyzést szeretnék a fentiekhez fűzni. Nevezetesen, hogy a homogén termelési függvények fontosak a közgazdasági szakirodalomban (lásd Zalai 2012), ezért egy ezeket tekintetbe vevő modellváltozat jelentősége nem szorul különösebb magyarázatra. Felhívom ugyanakkor arra a figyelmet, hogy a Leontief-féle termelési függvény ugyan szintén homogén, azonban ezt mégis külön tárgyalom. Kiemelt szerepet tulajdonítok az utóbbi termelési függvénynek, mivel olyan iparágak leírására különösen alkalmas, amely iparágakban az egyes termelési erőforrások szinte alig tekinthetők helyettesíthetőnek.

5.2.1. Ármeghatározás a második modellváltozatban

Az alapmodellben lineáris termelési függvény felhasználásával megmutattam, hogy létezik egyensúlyi árvektor, és rávilágítottam további a teljesség szempontjából releváns következményekre is. Ebben az egységben viszont az adott i-edik termelő tekintetében egy f_i homogén termelési függvény bevezetése mellett vizsgálom meg az egyensúlyi ármeghatározást kérdéskörét.

A rövidebb írásmód kedvéért bevezetem a $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_L)^\mathsf{T}$ jelölést. A piactisztítást továbbra is feltételezve teljesül, hogy a megtermelt mennyiség azonos lesz a összkereslettel, tehát ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$y_i(\mathbf{p}) = f_i(\mathbf{g}_i, h_i) \tag{5.10}$$

Felteszem, hogy $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ minden i-re, amely úgy értelmezhető, hogy input vagy munka nélkül nincs kibocsátás. Sőt a termelési függvény szigorú monoton növekedése is feltehető, vagyis, hogy az erőforrások növelése a kibocsátás növekedését eredményezi.

Az i-edik termelő nyereségfüggvényét a következőképpen értelmezzük ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i(\mathbf{p}) - \omega_i h_i - \sum_{k=1}^{L} r_k g_k, \tag{5.11}$$

ahol $\omega_i > 0$ a termelő által fizetett munkabér, $r_k > 0$ pedig a k-adik termeléshez szükséges input egységára.

Tegyen eleget minden egyes termelő a következő feltételrendszernek is:

$$\frac{\partial f_i}{\partial g_k} = \frac{r_k}{p_i}, i = 1, 2, \ldots, M, k = 1, 2, \ldots, L \tag{5.12a}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial h_i} = \frac{\omega_i}{p_i}, i = 1, 2, \ldots, M \tag{5.12b}$$

Az egyenletek jobb oldalán rendre a k-adik felhasznált termelési erőforrás és a munka relatív ára szerepel. Ennek birtokában felírhatjuk az Euler-tételt, így az alábbit kapjuk ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\theta_i f_i(\mathbf{g}, h_i) = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_i}{\partial g_k} g_k + \frac{\partial f_i}{\partial h_i} h_i = \sum_{k=1}^{L} \frac{r_k g_k}{p_i} + \frac{\omega_i h_i}{p_i} \tag{5.13}$$

Ennek segítségével viszont kifejezhető az összköltség:

$$\sum_{k=1}^{L} r_k g_k + \omega_i h_i = \theta_i p_i f_i(\mathbf{g}, h_i) \tag{5.14}$$

Tehát az összköltség egyszerűbb alakját kapom, amely a nyereségfüggvény egyszerűsödését eredményezi.

Megjegyzem, hogy amennyiben a termelési függvény konkáv minden változójában (sőt még a vegyes másodrendű parciális deriváltak zérus volta is feltehető), tehát az minden egyes erőforrás (ideértve a munkát is) vonatkozásában a csökkenő hozadék elvét követi, akkor az (5.12) a nyereségfüggvény optimalitásának elsőrendű feltételrendszereként értelmezhető az erőforrások szempontjából.[28]

Az (5.14) összefüggést felhasználva, a nyereségfüggvény a következő alakban írható fel ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\pi_i(\mathbf{p}) = (1 - \theta_i) p_i y_i(\mathbf{p}) \tag{5.15}$$

Az egyenletből látható, hogy az i-edik termelő nyereségfüggvénye ebben a modellváltozatban csak a már említett homogenitási fokszámtól, a termékártól és a kibocsátástól (esetemben a termelővel szembeni összkereslettől) függ.

[28] Érdemes lehet meggondolni, hogy jelentőséggel bírna-e, ha az összes Inada-feltétel teljesülne (vö. Inada 1963).

Ezután felírható az egyensúlyi termékárak létezésének elsőrendű feltételrendszere:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= (1-\theta_1)\left(y_1 + p_1 \frac{\partial y_1}{\partial p_1}\right) = 0 \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} &= (1-\theta_2)\left(y_2 + p_2 \frac{\partial y_2}{\partial p_2}\right) = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \pi_M}{\partial p_M} &= (1-\theta_M)\left(y_M + p_M \frac{\partial y_M}{\partial p_M}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

Szem előtt tartva a 4.1. Tétel gondolatmenetét, mindebből az alábbi a mátrixegyenlet adódik:

$$(\mathbf{I}_M - \mathbf{T})\left[\mathbf{BG1}_{N-M} + \epsilon(\mathbf{BB}^\mathsf{T} - \widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C})\mathbf{p}\right] = \mathbf{0}_M, \tag{5.17}$$

ahol $\mathbf{T}$ olyan diagonális mátrix, amelynek i-edik főátlóbeli eleme θ_i. A korábbi gondolatmenetet alapul véve kijön, hogy

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BG1}_{N-M} \tag{5.18}$$

Tekintettel arra, hogy a fenti vektoros alakon kívül az egyedi egyensúlyi árak is szerepet kapnak alább, ezért most röviden erre fordítok figyelmet. A (B.1) egyenlethez hasonló módon kiszámítható, hogy az egyensúlyi árvektor i-edik koordinátája:

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{ij} b_{kj} p_k}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} \tag{5.19}$$

Azt, hogy egyensúlyi árképzésnél az egyedi keresett mennyiségek nemnegatívak lesznek, az alábbiakban vázlatosan ismertetem. Előrebocsátom, hogy az alapmodellnél bemutatottakhoz képest – magától értetődő okok miatt – kissé eltérő lesz a bizonyítás. Ennek az eredménynek birtokában viszont már arra lehet következtetni, hogy a mostani modellváltozat teljesítheti az absztrakt piacszerkezet kívánalmait.

5.1. Tétel. *A* (5.18) *szerinti árvektor mellett kalkulált egyedi fogyasztások értékei nemnegatívak.*

Bizonyítás. Induljunk ki a már ismert egyenlőtlenségből:

$$\frac{b_{ij}\gamma_j}{\epsilon} + b_{ij} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{kj} p_k \geq b_{ij}(1-b_{ij})p_i \tag{5.20}$$

Egyszerű összegzést és a $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})$ kifejezéssel való osztást követően adódik, hogy

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} \geq p_i \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} \tag{5.21}$$

Mivel az (5.19) egyenlet miatt az egyenlőtlenség bal oldalán p_i áll, ezért

$$p_i \geq p_i \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} \tag{5.22}$$

Átrendezés és a művelet elvégzése után

$$p_i \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(2-b_{ij})} \geq 0 \tag{5.23}$$

Mivel a bal oldalon szereplő szorzat tényezői pozitívak, így az egyenlőtlenség teljesül. Következésképpen a keresletek, ennek folyományaként pedig a kínálatok is adott egyensúlyi árvektor esetén nemnegatívak. ■

Ezen a ponton zárom a második modellváltozat elemzését. A további megfontolások ugyanis túlságosan messzire vezetnének, emiatt szétfeszítenék a dolgozat kereteit. Befejezésül azonban hangsúlyozandó, hogy az (5.12) feltételrendszer és az egyensúlyi termékárak együttes fennállása nem szükségszerűen garantált. Mindenesetre tanulságos, ha ezek egyszerre nem teljesülhetnek.

5.2.2. Ármeghatározás a harmadik modellváltozatban

A harmadik modellváltozatban az eddig alkalmazott jelölésrendszert és a piactisztítás feltételét használva annyiban módosítom gondolatmenetemet, hogy az alábbi módon definiálom a termelési folyamatot az i-edik termelőre nézve ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$y_i(\mathbf{p}) = \min\left\{\frac{g_k}{n_{ki}}, \alpha_i h_i\right\}, \tag{5.24}$$

ahol $n_{ki} \geq 1$ érték jelenti k-adik termelési erőforrásból egységnyi termék legyártásához szükséges mennyiséget az i-edik termelő tekintetében. Azt feltételezem, hogy az i-edik termelő pontosan annyi termelési erőforrást vásárol k-adik inputként, valamint pontosan annyi munkával rendelkezik[29], amely y_i mennyiségű termék előállításához szükséges. Ennek megfelelően $g_k = n_{ki}y_i$ minden szóba jövő k-ra, valamint $h_i = y_i/\alpha_i$. Az is látszik

[29]Egész pontosan annyi munkavállalója van minden termelőnek, amennyivel képes legyártani a kívánt termékmennyiséget.

továbbá, hogy amennyiben valamelyik termelési erőforrás vagy a munkaidő zérus, akkor az adott termelő nem termel.

Az i-edik termelő nyereségfüggvénye ekkor (5.11) alakhoz képest a következő ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$\pi_i(\mathbf{p}) = p_i y_i(\mathbf{p}) - \left(\frac{\omega_i}{\alpha_i} + \sum_{k=1}^{L} r_k n_{ki}\right) y_i(\mathbf{p}) = \left(p_i - \frac{\omega_i}{\alpha_i} - \sum_{k=1}^{L} r_k n_{ki}\right) y_i(\mathbf{p}) \tag{5.25}$$

Eltérés a módosított termelési függvény miatt van. Látható, hogy ebben a modellváltozatban nemcsak bérköltségek, hanem erőforrás- vagy nyersanyagköltségek is felmerülnek.

Mindezt figyelembe véve az elsőrendű feltételtrendszer:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} &= y_1 + \left(p_1 - \frac{\omega_1}{\alpha_1} - \sum_{k=1}^{L} r_k n_{k1}\right) \frac{\partial y_1}{\partial p_1} = 0 \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} &= y_2 + \left(p_2 - \frac{\omega_2}{\alpha_2} - \sum_{k=1}^{L} r_k n_{k2}\right) \frac{\partial y_2}{\partial p_2} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \pi_M}{\partial p_M} &= y_M + \left(p_M - \frac{\omega_M}{\alpha_M} - \sum_{k=1}^{L} r_k n_{kM}\right) \frac{\partial y_M}{\partial p_M} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

A 4.1. Tételhez hasonló gondolatmenettel az elsőrendű feltételrendszerből pedig a következő mátrixegyenlet kapható:

$$\mathbf{BG1}_{N-M} + \epsilon(\mathbf{BB}^{\mathsf{T}} - \widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{C})\mathbf{p} + \epsilon\mathbf{WC1}_M = \mathbf{0}_M, \tag{5.27}$$

ahol $\mathbf{W}$ diagonális mátrix főátlójának i-edik eleme $\omega_i/\alpha_i + \sum_{k=1}^{L} r_k n_{ki}$. Innen $\mathbf{p}$ kifejezhető:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\mathbf{BG1}_{N-M} + \mathbf{WC1}_M\right) \tag{5.28}$$

Az egyensúlyi árvektor i-edik koordinátája a korábbiakhoz hasonló módon úgy is írható mint

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{ij} b_{kj} p_k}{2 \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_i}{\alpha_i} + \sum_{k=1}^{L} r_k n_{ki}\right) \tag{5.29}$$

Néhány megjegyzés fűzendő az $\omega_i/\alpha_i + \sum_{k=1}^{L} r_k n_{ki}$ összeghez. Ennek első tagja az i-edik termelő addicionális termékegységének előállítása kapcsán felmerülő bérköltség (munka

határköltsége), a második pedig az addicionális termékegység legyártásához kapcsolódó összes inputköltség (inputok határköltségösszege). Az összeg tehát a termelés határköltsége.

A harmadik modellváltozat vizsgálatának zárásaként felhívom a figyelmet arra, hogy az iméntiek fényében gondos elemzést igényelne annak a megállapítása, hogy vajon az alapmodell további levezetései (például az egyedi keresletek nemnegatív volta) milyen módosításokat végezve maradnak érvényesek, ha egyáltalán azok maradnak. Kérdésként vetődik fel például, hogy elegendő-e mindössze az ω/α hányados helyett a megfelelő okfejtésekben az $\omega_i/\alpha_i + \sum_{k=1}^{L} r_k n_{ki}$ kifejezést szerepeltetni ($i = 1, 2, \ldots, M$)?[30] A válasz az első modellváltozatnál leírtakhoz hasonlóan nyilvánvalóan nemleges.

5.3. A kapcsolati mátrix generálásának elméleti megalapozása

A valóban sokszereplős vizsgálatok érdekében, a szimuláció és kalibráció szempontjából lényeges az **A** kapcsolati mátrix generálása. Emiatt részletesen ismertetem azt, hogy milyen algoritmussal állítható elő a mátrix általános eleme, amelynek során Sebestyén és Szabó (2022) munkájára támaszkodom. Mivel a nagyméretű hálózatok általában hatványfüggvény-eloszlást követő skálafüggetlen struktúrák (Barabási et al. 1999), amelyet **A** generálásakor is szem előtt tartok. A konkrét algoritmus bemutatásán túl további elemzéseket végzek, amelyek az eredményül kapott mátrix által reprezentált hálózati struktúra vizsgálatára vonatkoznak. Ezen elemzésnél az analitikus megközelítésen túl, a szemléltetés céljából ábrákat is közlök.

Az eljárás során szimultán helyezünk el előre meghatározott mennyiségű nullát és egyest egy $M \times (N - M)$ méretű mátrixba. Az egyesek kívánt mennyisége a ϱ sűrűség alapján számítható ki. Így ezek száma $\varrho M(N - M)$ egész értékre kerekítve. Mindeközben persze az alapmodell megfelelő feltevése miatt arra is figyelni kell, hogy teljesüljenek azok a kritériumok, miszerint a mátrix minden egyes oszlopában legalább két darab egyes legyen, továbbá minden sorban legyen legalább egy egyes. Megjegyzem, hogy az algoritmus tekintettel van arra, hogy a mátrix egy helyére került-e már egyes vagy sem (többször nem kerülhet a mátrixnak ugyanarra a helyére egyes).

Ezen a ponton jegyezem meg, hogy a hálózati sűrűséget a szokásos módon értelmezem (ennek általános definíciója a dolgozat A. függelékben szerepel):

$$\varrho = \frac{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N-M} a_{ij}}{M(N - M)} \tag{5.30}$$

[30] Az utóbbi összegről megjegyzem, hogy az nem más, mint az i-edik termelő határköltsége, amely jelen esetben is egybeesik annak átlagköltségével.

Felhívom a figyelmet arra, hogy mivel az **A** mátrix minden sorában legalább egy, minden oszlopában pedig legalább két egyes kell, hogy legyen, ezért $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} a_{ij} \geq \max\{M, 2(N-M)\}$, így $\varrho \geq \max\{1/(N-M), 2/M\}$. Ezek a szükséges feltételek figyelembe veendők az **A** mátrix generálásakor. Mindjárt hozzá is fűzöm azonban, hogy mind a szimulációs, mind a kalibrációs alfejezetekben $N > 2M$, így lényegében csak a $\varrho \geq 2/M$ szükséges feltétellel kell számolni.

A kód tehát szimultán osztja ki az $M\times(N-M)$ méretű kapcsolati mátrixba az egyeseket, az alábbiakban ismertetett eloszlás (súlyok) figyelembevételével. Azonban ezt az eljárást az érthetőség kedvéért részeire bontom. Az egyesek helyének meghatározását úgy is fel lehet fogni, hogy szimultán sor- és oszlopindexet választunk.

Nézzük először a sorindex választását (azaz termelőt választunk). Utóbbinál a $\mathbf{w}^{(1)}$ súlyok (kapcsolódási valószínűségek) figyelembevétele szükséges, ahol

$$w_i^{(1)} = \frac{i^{-I_1}}{\sum_{k=1}^{M} k^{-I_1}}, i = 1, 2, \ldots, M, \tag{5.31}$$

továbbá $I_1 \in [0, \infty)$. Ellenőrizhető, hogy $\sum_{i=1}^{M} w_i^{(1)} = 1$.

Most következzék az oszlopindex meghatározása (tehát fogyasztót választunk). A szóba jövő helyek közül a $\mathbf{w}^{(2)}$ súlyok (kapcsolódási valószínűségek) alapján történik a kiválasztás, ahol

$$w_j^{(2)} = \frac{j^{-I_2}}{\sum_{k=1}^{N-M} k^{-I_2}}, i = 1, 2, \ldots, N-M, \tag{5.32}$$

továbbá $I_2 \in [0, \infty)$. Ellenőrizhető, hogy $\sum_{j=1}^{N-M} w_j^{(2)} = 1$.

Látható, hogy a fent definiált súlyok összege egy, hiszen azok normálva vannak. Azok számlálójában egy negatív kitevőjű hatványfüggvény szerepel. A súlyok ilyetén választásának alapgondolata Goh et al. (2001) és a rá hivatkozó Catanzaro és Pastor-Satorras (2005) munkája nyomán történt.

Ugyanakkor az is látható, hogy

$$\mathbf{P}(a_{ij} = 1) = w_i^{(1)} w_j^{(2)}, i = 1, 2, \ldots, M, j = 1, 2, \ldots, N-M \tag{5.33}$$

Egyszerűen kiszámítható, hogy a $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} \mathbf{P}(a_{ij} = 1) = 1$ egyenlőség teljesül. Azaz fennáll, hogy a valószínűségek összege egy. Megjegyzem, hogy a mátrixgeneráláshoz használt kódrészben valójában nem külön-külön $w_i^{(1)}$ és $w_j^{(2)}$ súlyokra, hanem a $\mathbf{P}(a_{ij} = 1)$ értékekből képzett súlyvektorra támaszkodik az algoritmus, ahol az iménti érték a vektor $[(N-M)(i-1)+j]$-edik eleme.

Mielőtt tovább mennék megvizsgálom e súlyokat részletesebben is. Két esetet tekintek át. Elsőként azt nézem meg, amikor I_1 vagy I_2 valamelyike zérus, másodjára pedig azt vizsgálom, amikor az említett paraméterek egyike sem zérus. Az első esetre rögtön

adódnak rendre az $1/M$ és $1/(N-M)$ értékek. Tehát ekkor egyenletes valószínűséggel választunk sort, majd oszlopot (persze figyelembe véve a megfelelő megszorításokat). Ezenkívül, ha a termelők száma növekszik, akkor az első súlyérték csökken, míg a második nő. A következő eset kapcsán csak annyit emelek ki, hogy ekkor egyik súlyérték tekintetében sincs egyenletes valószínűség. Tehát nem mindegy, hogy a szóban forgó kitevőértékek milyen értéket vesznek fel. Ez befolyásolja egyrészt az egyes termelők fogyasztóinak számát, másrészt az egyes fogyasztók által vásárolt termékszámot is. Így előfordulhat olyan eset, amikor bizonyos termelőktől jóval több fogyasztó vásárol, mint másoktól, illetve a fogyasztói oldalon találhatunk olyan fogyasztót, aki sokkal többfajta terméket fogyaszt, mint mások. Vagyis e paraméterek révén meg lehet jeleníteni az interakciós hálózati szerkezet aszimmetriáját mind termelői, mind fogyasztói oldalon, amelynek a szerepére a megfelelő helyen még vissza fogok utalni.

Az eddig leírtakon túl a mostani alfejezet egy további célja, hogy vázlatosan – az apróbb részletekre kevésbé hangsúlyt helyezve – megmutassam, hogy amennyiben I_1 és I_2 pozitív, akkor d_i^P és d_j^C eloszlásai hatványfüggvényt követnek ($i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N-M$). Az egyszerűség és tömörség kedvéért bevezetem a következő jelöléseket: $L = M, N-M$, $I = I_1, I_2$ és $d_k = d_k^P, d_k^C$ és $w_k = w_k^{(1)}, w_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \ldots, L$).

Az imént jelzett levezetéshez Goh et al. (2001) illetve Catanzaro és Pastor-Satorras (2005) munkái nyomán a

$$\frac{d_k}{\sum_{l=1}^{L} d_l} = \widetilde{C}_k k^{-I}, k = 1, 2, \ldots, L, \tag{5.34}$$

megállapításból indulok ki, ahol $\widetilde{C}_k > 0$ egy megfelelő arányossági tényező. Mivel teljesül, hogy $\sum_{l=1}^{L} d_l = \varrho M(N-M)$, ezért az (5.34) nevezőjével történő átszorzás után d_k kifejezhető:

$$d_k = \varrho M(N-M)\widetilde{C}_k k^{-I} \tag{5.35}$$

Annak a valószínűsége, hogy d_k kisebb egy rögzített d értéknél, a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(d_k < d) &= \mathbf{P}\left(\varrho M(N-M)\widetilde{C}_k k^{-I} < d\right) = \mathbf{P}\left(k > \left[\frac{\varrho M(N-M)\widetilde{C}_k}{d}\right]^{\frac{1}{I}}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(k \leq \left[\frac{\varrho M(N-M)\widetilde{C}_k}{d}\right]^{\frac{1}{I}}\right) \end{aligned} \tag{5.36}$$

Alkalmazva az Embrechts et al. (2002: 179) munkájában szereplő kvantilis-függvénnyel kapcsolatos részt:

$$\mathbf{P}\left(d_k < d\right) = 1 - \frac{1}{L}\left[\frac{\varrho M(N-M)\widetilde{C}_k}{d}\right]^{\frac{1}{I}} \tag{5.37}$$

Innen pedig már adódik a sűrűségfüggvény:

$$\mathbf{P}(d) = \frac{1}{LI}\left[\varrho M(N-M)\widetilde{C}_k\right]^{\frac{1}{I}} d^{-\frac{I+1}{I}} \tag{5.38}$$

Látható, hogy ha $I > 0$, akkor a fokszámeloszlás valóban hatványfüggvényt követ.

Még megvizsgálom azt az esetet, amikor $I = 0$. Induljunk ki abból, hogy

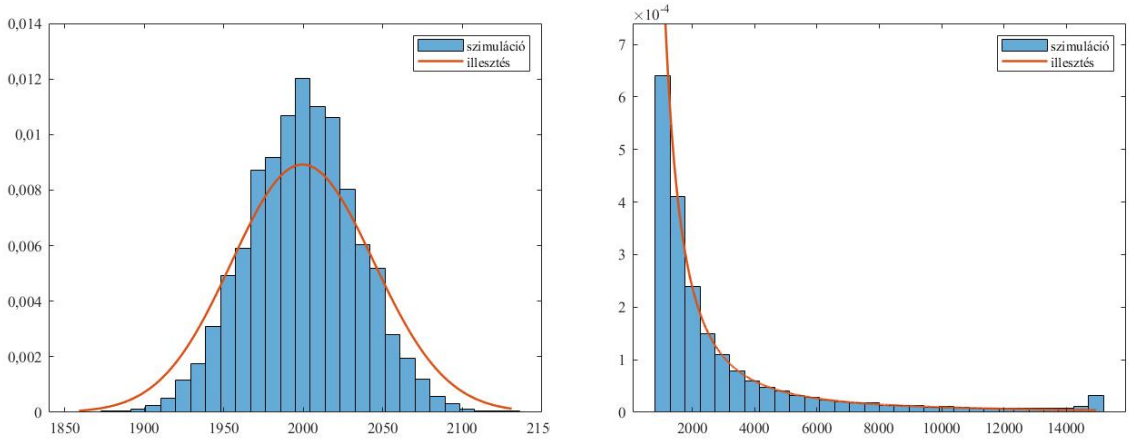
$$\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{L} \frac{d_k}{\sum_{l=1}^{L} d_l}\right] = 1, k = 1, 2, \ldots, L \tag{5.39}$$

Ebből egyszerű átrendezéssel kiszámítható, hogy $\mathbf{E}[d_k] = \varrho(N-M)$, ha $L = M$, illetve $\mathbf{E}[d_k] = \varrho M$, ha $L = N - M$. Mivel jelen esetben a $\mathbf{P}(d_k)$ valószínűség értékét binomiális eloszlás szerint határozzuk meg, így a szóban forgó valószínűség felírásához szükséges bekövetkezési valószínűség értéke az iménti várható értékből megkapható, és ez ϱ. Következésképpen

$$\mathbf{P}(d) = \binom{L}{d}\varrho^d(1-\varrho)^{1-d} \approx \frac{(\varrho L)^d e^{-\varrho L}}{d!}, \tag{5.40}$$

ha L meglehetősen nagy. Eszerint az $I = 0$ esetben a vizsgált fokszámeloszlások Poisson-eloszlást követnek ϱL várható értékkel és $\sqrt{\varrho L}$ szórással.

5.1. ábra. Fokszámeloszlások hisztogramjai ($I_1 = 1, I_2 = 0$)



(a) Fogyasztói fokszámeloszlás (fogyasztott termékvariánsok eloszlása)

(b) Termelői fokszámeloszlás (fogyasztók számának eloszlása)

Az iméntiek illusztrálására tekintsünk egy $\mathbf{A}$ mátrixot, az $M = 10000$, $N = 25000$, $I_1 = 1$, $I_2 = 0$ és $\varrho = 0,2$ paraméterek mellett. A kapcsolódó fokszámeloszlások hisztogramjait a 5.1. ábra mutatja. Ezekre a hisztogramokra elméleti eloszlások görbéit illesztettem a szemléletesség érdekében. Az ábra bal oldali hisztogramját Poisson-eloszlást, míg a jobb oldalit hatványfüggvény-eloszlást figyelembe véve közelítettem. Megjegyzem, hogy

amennyiben az illesztett hatványfüggvényt $\hat{y} = \beta\hat{x}^{-2}$ alakban keressük, akkor a jelenlegi esetben $\beta = 947,264$ szorzótényező alapján végeztük el az illesztést. Látható, hogy a fentebb vázolt elméleti megfontolásokkal összhangban a 5.1. (a) ábra szimmetrikus, míg a 5.1. (b) ábra jelentős mértékben aszimmetrikus eloszlást mutat.

5.4. Kiegészítő szimulációk: az interakciós hálózati szerkezet és az egyensúlyi értékek viszonya

Az alapmodell tekintetében már bemutattam ugyan számpéldákat a korábbi alfejezetekben, azonban ezek viszonylag kisméretűek voltak, ami azt jelenti, hogy az **A** kapcsolati mátrix által reprezentált interakciós hálózati szerkezetben kevés termelő és fogyasztó szerepelt. A szóban forgó hiányosságot kiküszöbölendő, a jelenlegi egységben nagyobb méretű struktúrákat fogok figyelembe venni. Ez a törekvésem reményeim szerint finomítani fogja azt a képet, amelyet az eddigiek során a dolgozatban kifejtett bizonyos modellekről (gondolok itt elsősorban az alapmodellre, továbbá az első modellváltozatra) kaphattunk. Nem utolsósorban a disszertáció bevezetésében lévő második kutatási kérdésre is ennek az alfejezetnek a segítségével kívánok választ adni. Mindazonáltal nincs lehetőségem teljességre törekedni, annyit viszont megjegyzek, hogy sokkal részletesebb és komplexebb módon is lehetne taglalni a most vizsgálandó kérdést.

Az interakciós hálózati struktúra és az egyensúlyi értékek kapcsolatának újabb szempontokból való feltárása érdekében különböző hálózati sűrűségek mellett szimulációkat végzek, majd az eredményeket hisztogram és függvénygrafikon segítségével ábrázolom (először a hisztogramokhoz, majd a függvényábrázoláshoz kapcsolódó szimulációkat tárgyalom). Ahol ez releváns, ott a paraméter-választást az egyes szimulációk előtt közlöm, és ahhoz bizonyos esetben rövid magyarázatot is fűzök. A szimulációink során legfeljebb csak egy paraméter tekintetében engedek meg heterogenitást.

A hisztogramokhoz szükséges szimulációkkal egy időben, átlagolt korrelációs mátrixokat is számolok, amelyek kiegészítik, árnyalják az illusztrációt, vagyis a jobb megértést szolgálják. Ezeket úgy állítom elő, hogy átlagolom az egyes hálózati sűrűségekhez tartozó kimenetek korrelációs mátrixait. A korábbi jelöléseket megtartva, azok a vektorpárok, amelyek korrelációját elemzem a következők: $\mathbf{p}$ és $\mathbf{v}^{\mathrm{dom}}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{v}^{\mathrm{dom}}$, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{y}$. Végül meghatározom az egyes eloszlások kurtózisát is, figyelembe véve azt a sztenderdnek mondható szabályt, hogy a kurtózis háromnál nagyobb értékénél az eloszlás leptokurtikus. Minden egyes eloszlásnál külön figyelmet fordítok a leptokurtózis jelenségére, azonban a kurtózis pontos értékének közlését mellőzöm.

A hisztogramon ábrázolt szimulációknál s darab különböző hálózati sűrűséget tekintek. Esetemben $s = 6$, tehát ennyi eltérő hálózati sűrűség mellett szimulálunk. A sűrűségek

konkrét értékei rendre: 10%, 25%, 40%, 55%, 70% és 85%. Azaz a viszonylag ritka, a közepesen sűrű és a meglehetősen sűrű interakciós hálózati szerkezetek is képviseltetve vannak. Ha $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{y}_i$ és $\mathbf{v}_i^{\text{dom}}$ jelöli rendre az egyes vektorok szimulációs kimeneteleit az i-edik hálózati sűrűség mellett, akkor az előző bekezdésben említett korrelációs mátrixokat rendre a következő módon állítom elő: $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\rho\left(\mathbf{p}_i, \mathbf{v}_i^{\text{dom}}\right)$, $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\rho\left(\mathbf{y}_i, \mathbf{v}_i^{\text{dom}}\right)$, $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\rho\left(\mathbf{p}_i, \mathbf{y}_i\right)$. Ezeknek a mátrixoknak az egyes szimulációk során kiszámított és tizedestört alakban feltüntetett elemeit két tizedesjegyre kerekítem, ahol szükséges.

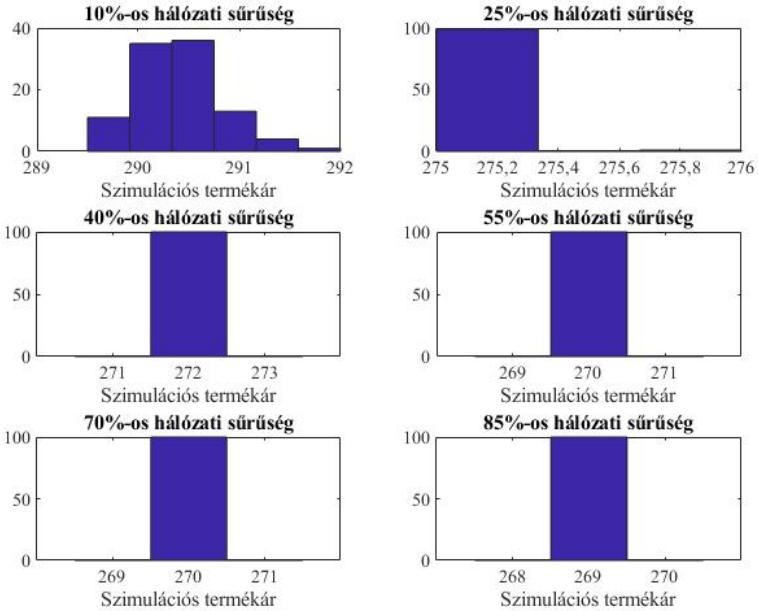
Az alábbiakban a hisztogramon ábrázolt szimulációkat két csoportra osztom. Az első csoportban (5.2–5.9. ábrák) $I_1 = 0{,}75$ és $I_2 = 0$, vagyis csak a termelők fokszámeloszlása jelentősen aszimmetrikus, valamint hatványfüggvényt követ, a fogyasztóké azonban nem. Utóbbi azt jelenti, hogy a fogyasztók által megvásárolt termékvariánsok számát tekintve nem jellemző az extremitás. Ellenben a második csoportban (5.10–5.17. ábrák) olyan szimulációkat mutatok be, amelyeknél $I_1 = 0{,}75$ és $I_2 = 0{,}5$. Vagyis ezeknél a szimulációknál már a fogyasztók fokszámeloszlása is aszimmetrikus, továbbá a termelőkhöz hasonlóan hatványfüggvénnyel jellemezhető. Így az utóbbi esetben nagyobb számú olyan fogyasztó jelenléte feltételezhető a modellezett részpiacon, akinek viszonylag kevés termék alakítja a fogyasztását, tehát a fogyasztók csak egy kisebb hányada vásárol relatíve sokfajta terméket. Következésképpen ez a feltételezés megengedi, hogy a megvásárolt termékvariánsok tekintetében extremitás lehessen a modellezett részpiacon.

Az iméntieket kiegészítendő, fontosnak tartom megemlíteni, hogy a kapcsolati mátrix konkrét realizációja eltérő lehet bizonyos szimulációs lépéseknél. Ennek ellenére az interakciós hálózati szerkezet különböző realizációi során néhány, a struktúrát alapvetően meghatározó paraméterérték nem változik, így azoknak a lényeges információtartalma megőrződik. E helyütt jelezem azt is, hogy a második csoportban szereplő szimulációk I_1-en és I_2-n túli további paramétereinek megválasztása rendre megegyezik az első csoportban lévő szimulációk paraméter-választásával, hozzátéve, hogy heterogén paramétereknél az azonosság csak az eloszlás erejéig teljesül.

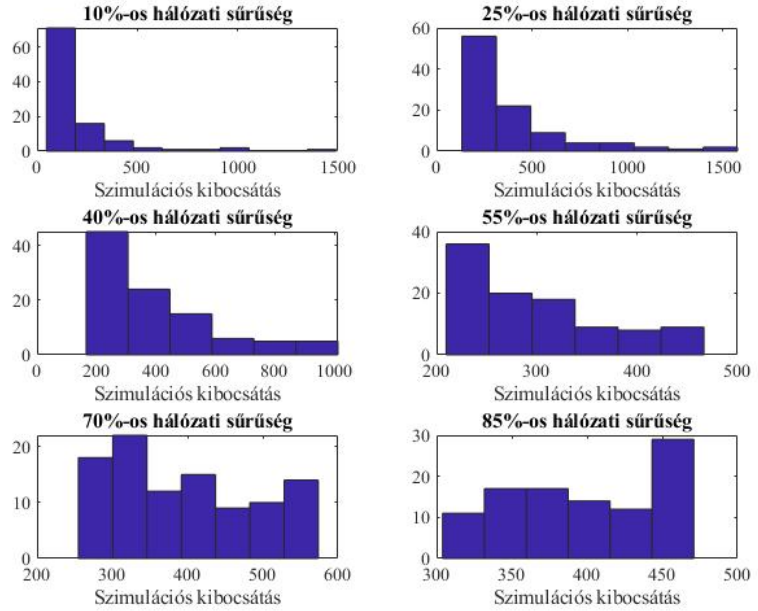
Előre szeretném bocsátani a szimulációkat elemző-értelmező szakasz vonatkozásában, hogy az ott szereplő megállapítások némelyikét megfelelő körültekintéssel szükséges kezelni. Lesz ugyanis olyan eset, amelynél a munka termelékenységi paramétere termelőnként eltérő lehet. Azonban, ahogy arra az 5.1. alfejezetben már kifejezetten utaltam is, a nevesített esetben előfordulhat, hogy bizonyos paraméter-tartományban némelyik egyedi fogyasztás egyensúlyi értéke negatív lesz. Utóbbi viszont a szimulációs tanulságok alapján csak alacsonyabb hálózati sűrűségeknél befolyásolja az eredményeket (lásd a 5.18–5.25. ábrákat).

A 5.2–5.3. ábrák esetében $M = 100, N = 500, \epsilon = 0{,}5, \gamma = 100, \alpha = 0{,}3, \omega = 20$. Amint fentebb említettem, ennél a szimulációnál nincs paraméterszintű heterogenitás.

5.2. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, első eset)



5.3. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, első eset)

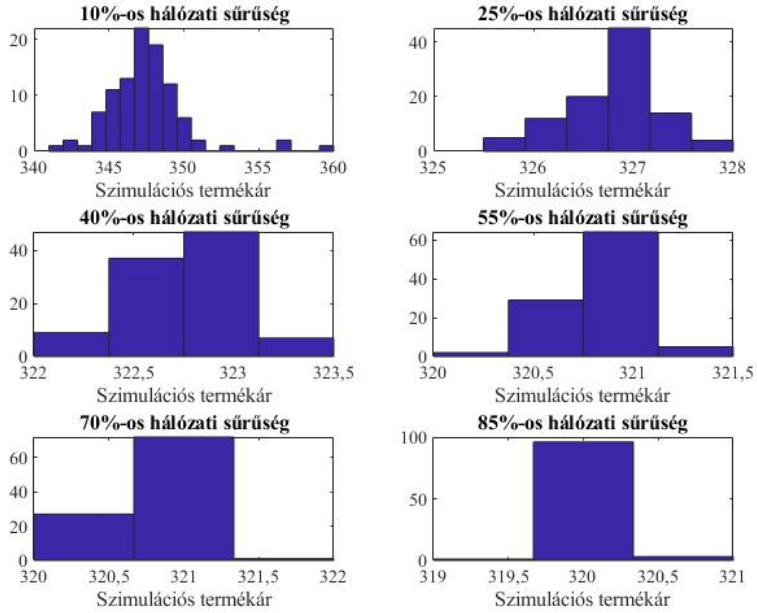


Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

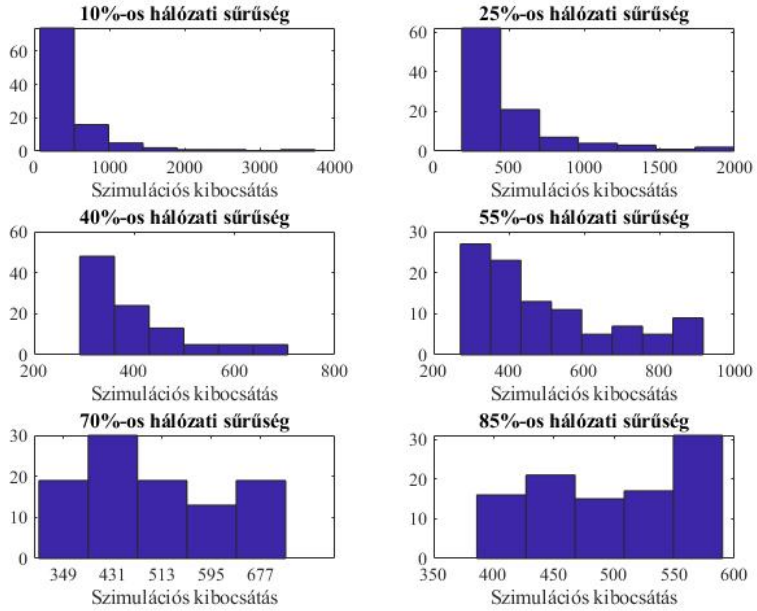
$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}41 \\ -0{,}41 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}55 \\ -0{,}55 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}57 \\ 0{,}57 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

A 5.4–5.5. ábrák esetében $M = 100, N = 500, \epsilon = 0{,}5, \alpha = 0{,}3, \omega = 20$, valamint $\gamma = 125 + 10\varepsilon$, $\varepsilon \sim N(0, 1)$ (fogyasztói oldalú heterogenitás).

5.4. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, második eset)



5.5. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, második eset)

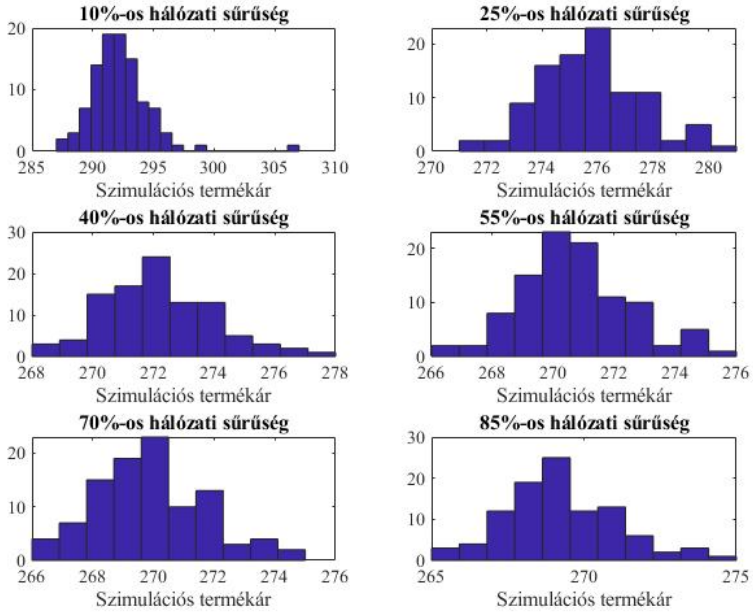


Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

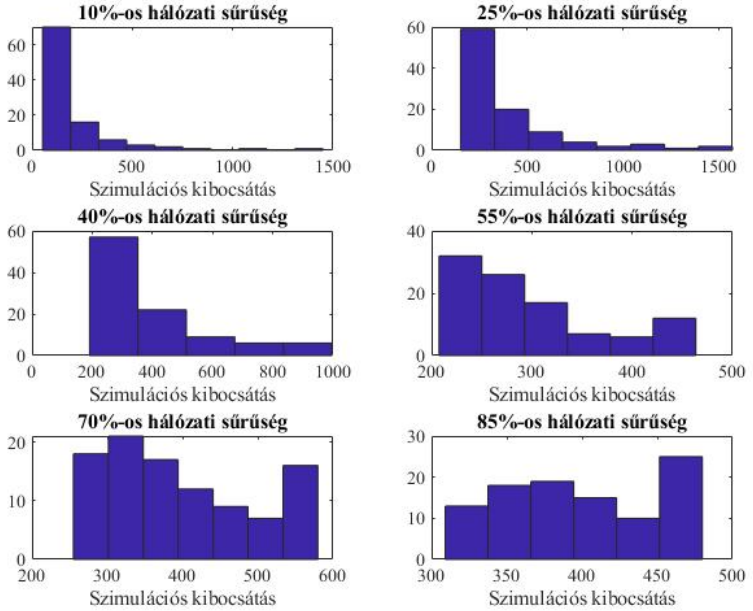
$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}03 \\ -0{,}03 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}62 \\ -0{,}62 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

A 5.6–5.7. ábrák esetében $M = 100, N = 500, \epsilon = 0{,}5, \gamma = 100, \omega = 20$, valamint $\alpha = 0{,}3 + 0{,}02\varepsilon$ heterogén (termelői oldalú heterogenitás), $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

5.6. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, harmadik eset)



5.7. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, harmadik eset)

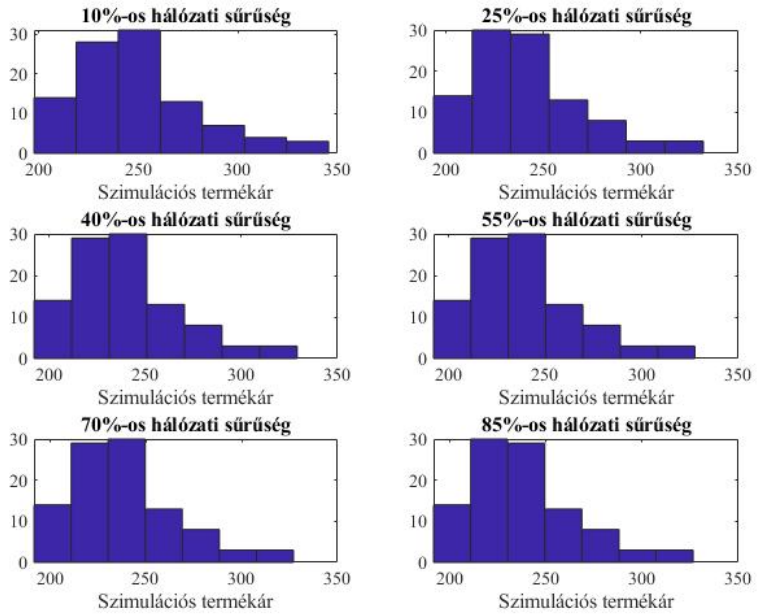


Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

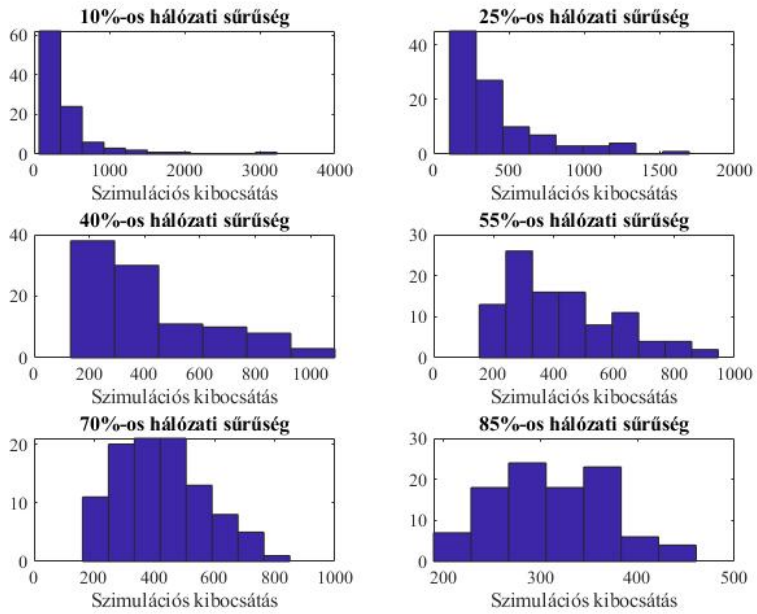
$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}10 \\ -0{,}10 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}62 \\ -0{,}62 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

A 5.8–5.9. ábrák esetében $M = 100, N = 500, \epsilon = 0{,}5, \omega = 20$, $\gamma = 125 + 10\varepsilon$, $\varepsilon \sim N(0,1)$ és $\alpha = 0{,}3 + 0{,}02\varepsilon$ heterogén, $\varepsilon \sim N(0,1)$.

5.8. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (első csoport, negyedik eset)



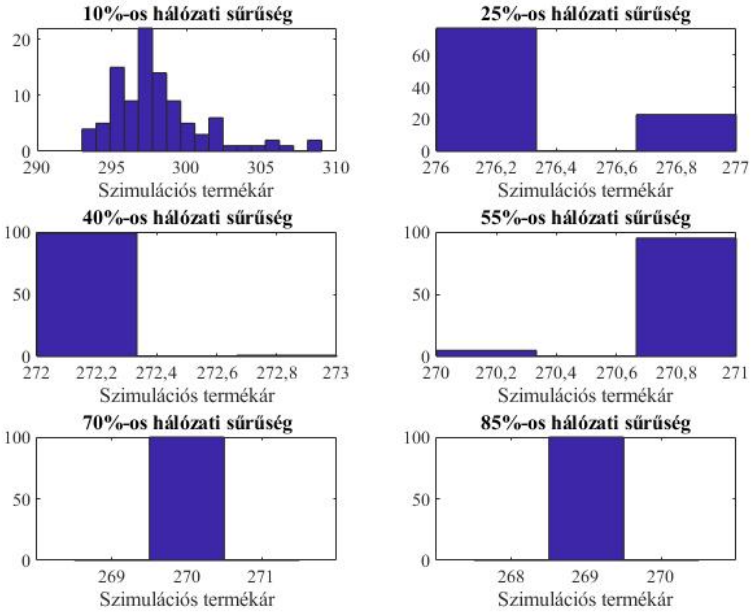
5.9. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (első csoport, negyedik eset)



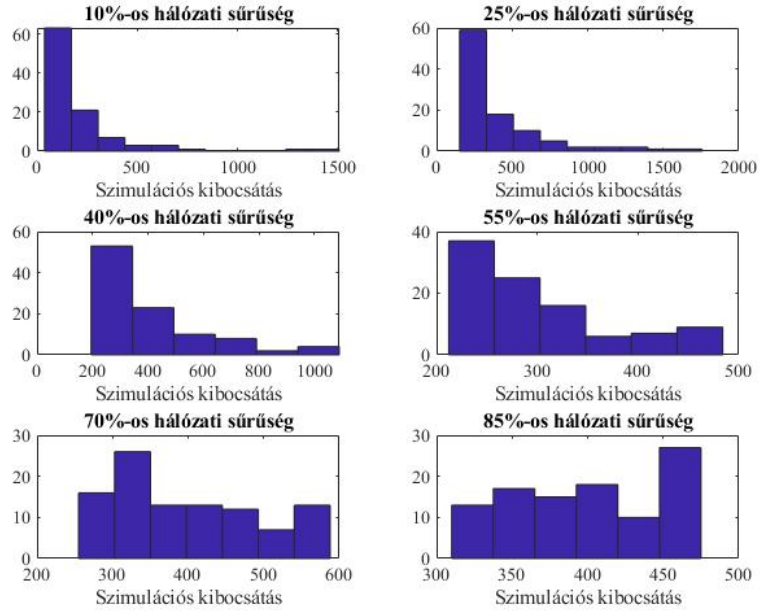
Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}03 \\ 0{,}03 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}47 \\ -0{,}47 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

5.10. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, első eset)



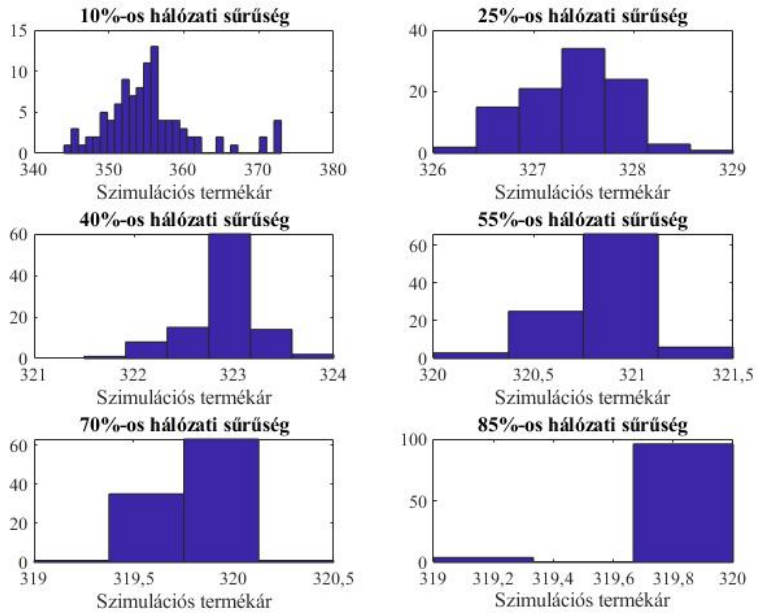
5.11. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, első eset)



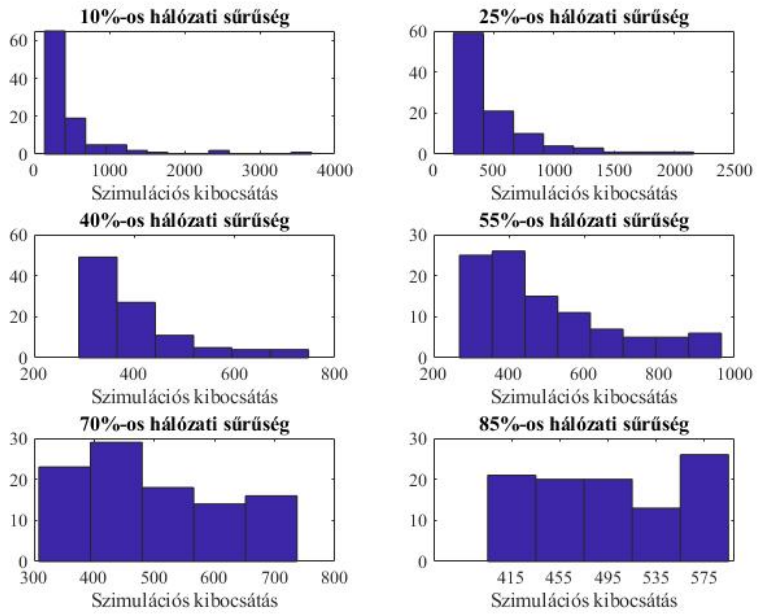
Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}57 \\ -0{,}57 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}63 \\ -0{,}63 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}72 \\ 0{,}72 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

5.12. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, második eset)



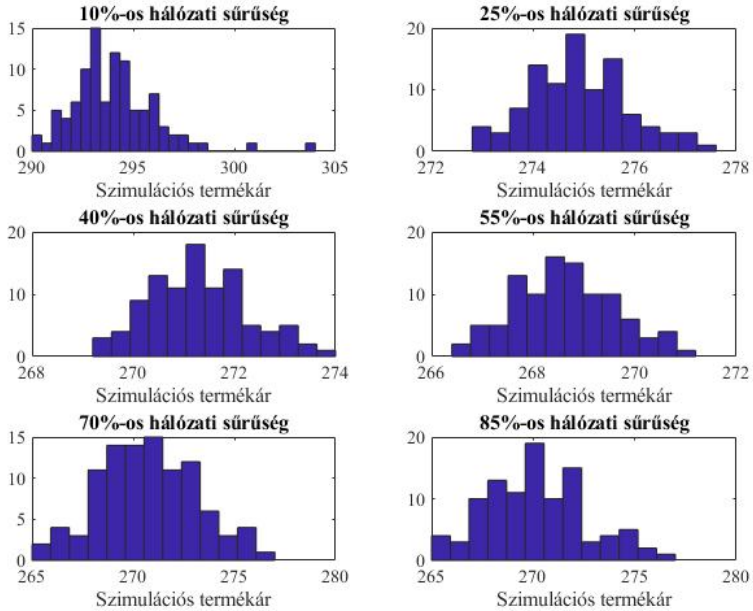
5.13. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, második eset)



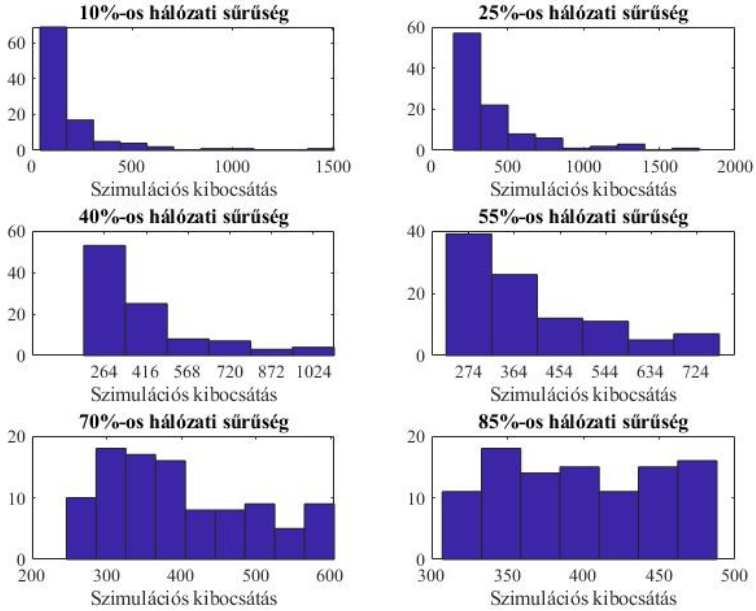
Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}13 \\ -0{,}13 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}58 \\ -0{,}58 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}21 \\ 0{,}21 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

5.14. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, harmadik eset)



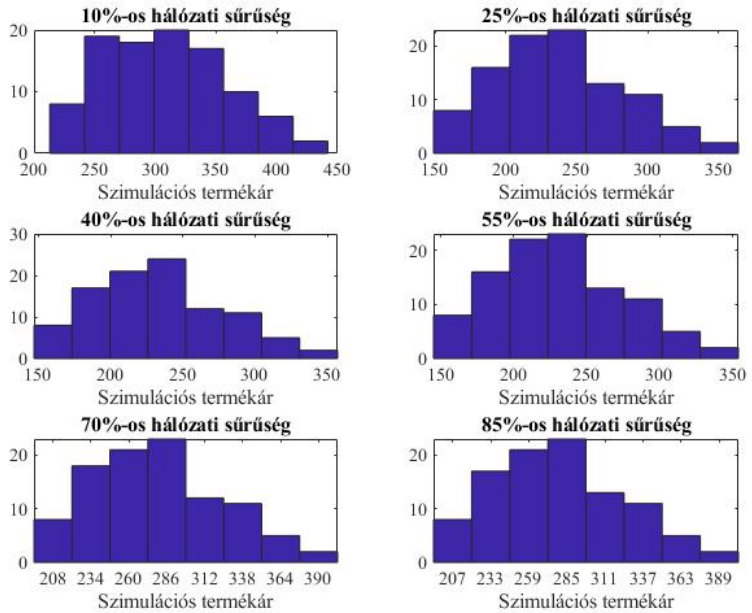
5.15. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, harmadik eset)



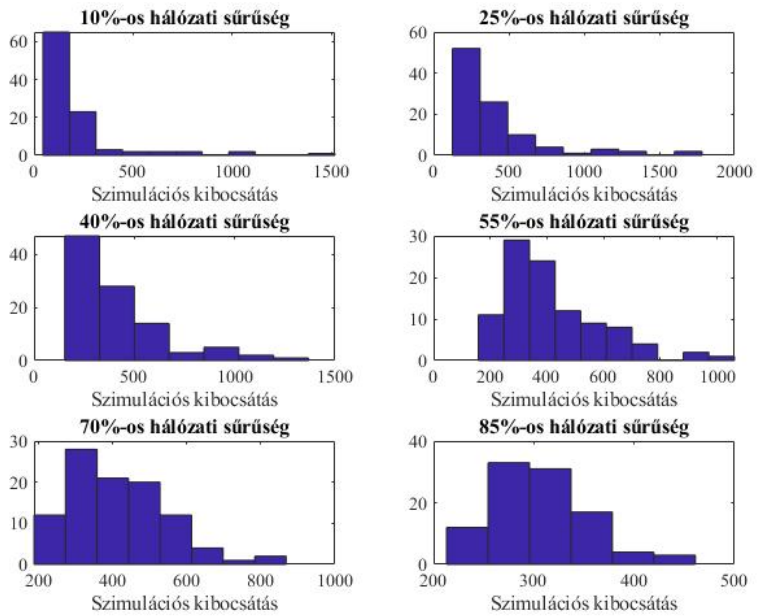
Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}06 \\ 0{,}06 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}62 \\ -0{,}62 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}07 \\ -0{,}07 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

5.16. ábra. Egyensúlyi árhisztogramok (második csoport, negyedik eset)



5.17. ábra. Egyensúlyi kibocsátás-hisztogramok (második csoport, negyedik eset)



Az átlagolt korrelációs mátrixok rendre az alábbiak:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}03 \\ -0{,}03 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}47 \\ -0{,}47 & 1{,}00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}44 \\ -0{,}44 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

A fenti szimulációk korrelációs mátrixainak leglényegesebb tanulságait az áttekinthetőség érdekében összefoglalom a 5.1. táblázatban. Ebből látható, hogy az egyensúlyi

termékár- és kibocsátásvektor a konkrét szimulációknál konzisztensen ellentétes irányú együttmozgást mutat a centralitásvektorral. Ami a termékárak és kibocsátások viszonyát illeti, megemlítendő, hogy az első (vagyis, amikor homogének a paraméterek) és a negyedik esetben (vagyis, amikor az árérzékenységi paraméterek tekintetében heterogenitást engedek meg) a szimulációk mindkét csoportjában rendre egyirányú és ellentétes együttmozgás tapasztalható. Tehát bizonyos paraméterheterogenitás megfordíthatja a homogén paraméter-választás mellett tapasztalt korreláció irányát a szóban forgó vektorok között.

5.1. táblázat. Korrelációs mátrixok tartalmának összefoglalása

	Első eset	Második eset	Harmadik eset	Negyedik eset
Első csoport (termékár–centralitás)	⊟	—	⊟	—
Első csoport (kibocsátás–centralitás)	⊟	⊟	⊟	⊟
Első csoport (termékár–kibocsátás)	⊞	—	⊞	⊟
Második csoport (termékár–centralitás)	⊟	⊟	—	—
Második csoport (kibocsátás–centralitás)	⊟	⊟	⊟	⊟
Második csoport (termékár–kibocsátás)	⊞	⊞	—	⊟

⊞: releváns egyirányú együttmozgás (korrelációs együttható legalább 0,1)
⊟: releváns ellentétes irányú együttmozgás (korrelációs együttható legfeljebb −0,1)
—: irreleváns együttmozgás (korrelációs együttható −0,1 és 0,1 közötti)
(*Saját szerkesztés*)

Ezenkívül a homogén paraméter-választás szimulációi (5.2 és 5.10. ábra) relative alacsony hálózati sűrűség mellett heterogén egyensúlyi árak megjelenését sejtetik, magasabb sűrűségeknél ellenben úgy tűnik, hogy ez a heterogenitás elvész. Utóbbi nem meglepő, hiszen intuitíve, illetve az elméleti rész tanúságait is figyelembe véve, az árazási különbségek felerősödését várjuk ritka és termelői oldalról aszimmetrikus interakciós hálózati szerkezetekben.

A tartalmi egység elején lévő megjegyzéssel összhangban kiszámítottam a hisztogramos szimulációk mindkét csoportjának kurtózisait is. Eredményeinket összefoglaló jelleggel a 5.2–5.3. táblázat tartalmazza. Ezek ugyan számszerű értékeket nem tartalmaznak, mégis kiolvasható belőlük egy mintázat a konkrét szimulációink tekintetében.

5.2. táblázat. Egyensúlyi termékáreloszlások kurtózisai

Hálózati sűrűség	10%	25%	40%	55%	70%	85%
Első csoport, első eset	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Első csoport, második eset	✓	✓	✗	✓	✓	✓
Első csoport, harmadik eset	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Első csoport, negyedik eset	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Második csoport, első eset	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Második csoport, második eset	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Második csoport, harmadik eset	✓	✗	✗	✗	✗	✗
Második csoport, negyedik eset	✗	✗	✗	✗	✗	✗

✓: van kurtózis, ✗: nincs kurtózis

(*Saját szerkesztés*)

5.3. táblázat. Egyensúlyi kibocsátás-eloszlások kurtózisai

Hálózati sűrűség	10%	25%	40%	55%	70%	85%
Első csoport, első eset	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Első csoport, második eset	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Első csoport, harmadik eset	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Első csoport, negyedik eset	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Második csoport, első eset	✓	✓	✓	✓	✗	✗
Második csoport, második eset	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Második csoport, harmadik eset	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Második csoport, negyedik eset	✓	✓	✓	✓	✓	✓

✓: van kurtózis, ✗: nincs kurtózis

(*Saját szerkesztés*)

A 5.2. táblázat mutatja, hogy a konkrét szimulációs kimeneteleinknél az látszik, hogy 10%-os sűrűség mellett a második csoport negyedik esetének kivételével mindenhol jelentkezik leptokurtózis. Az is figyelemre méltó, hogy a szimulációk első csoportjában jóval többször tapasztalható leptokurtózis mint a másodikban. Ebből persze még messzemenő következtetés nem vonható le az interakciós hálózati struktúra és a modell áreloszlásainak leptokurtikusságára nézve, az viszont feltétlenül állítható, hogy a struktúra aszimmetriája kisebb-nagyobb mértékben befolyásolhatja az eloszlások említett típusú kurtózisát.

A 5.3. táblázatból látható, hogy szimulációinkat illetően jellemzően a 10%-, 25%- és 40%-os hálózati sűrűségeknél jelentkezik leptokurtózis. Külön kiemelem, hogy a második csoportba tartozó utolsó eset kapcsán olyan szimulációs kimenetellel van dolgunk, amelyik az összes hálózati sűrűség mellett leptokurtikus eloszlást eredményez. Vagyis példáinkban olyan esetek jelennek meg, ahol a relatíve ritkább interakciós hálózati szerkezetek kedveznek az egyensúlyi kibocsátások terén jelentkező kisebb-nagyobb extremitásoknak.

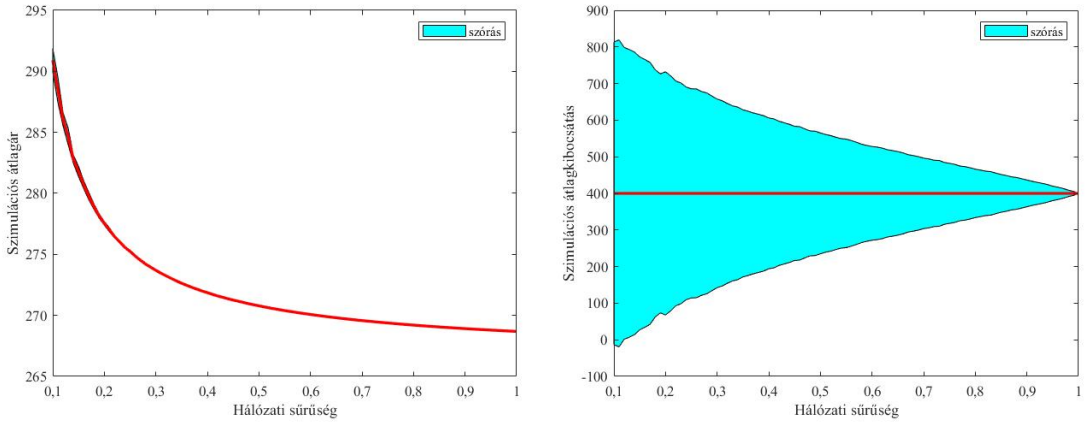
Tekintsük még át az egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitásának alakulását változó hálózati sűrűségek mellett. Ehhez az egyensúlyi átlagárat és -kibocsátást ábrázolom a hálózati sűrűség függvényében az egyensúlyi értékek szóródásának feltüntetésével együtt. Ezen elvek mentén kétszer négy szimulációs esetet mutatok be (5.18–5.25. ábrák). Hasonlóan a hisztogramos szimulációkhoz az első csoportba tartozó ábrák esetében $I_1 = 0{,}75$ és $I_2 = 0$, míg a második csoport ábráinál $I_1 = 0{,}75$ és $I_2 = 0{,}5$. Az egyes szimulációkban a legkisebb hálózati sűrűségtől (ez a most soron következő szimulációknál is 10%) 1%-os lépésközökkel haladok a 100%-os sűrűségig. Továbbá a szimulációk paraméterezései rendre megegyeznek az első és második csoport hisztogramos szimulációinak paraméterezéseivel, így a szóban forgó paraméter-választást újfent nem ismertetem.

Meglátásom szerint mindennek lényeges szerepe van az alfejezet megelőző részének kiegészítése tekintetében. Ugyanis a szóban forgó szimulációk és a kapcsolódó grafikonok egy másik nézőpontból mutatják be az egyensúlyi termékárak és -kibocsátások heterogenitásának alakulását. Olyan aspektus ez, amely vélhetően rejtve maradt a fenti hisztogramos ábrázolás során.

Rátérve az első csoport ábráinak elemzésére kiemelem, hogy az egyensúlyi kibocsátás az első három szimulációnál jelentős mértékben szóródik alacsony, közepes és magasabb sűrűségeknél, azonban jól látható módon a szórás a sűrűség növekedésével csökken. Az egyensúlyi áraknál viszont nem ez a helyzet. Míg az első esetben alig látható szórás, azt is csak relatíve alacsony sűrűségek mellett, addig a másik két esetben nagyobb mértékben szóródnak az egyensúlyi árak. A második esetben a fogyasztás heterogenitása hatást gyakorol ugyan az egyensúlyi árak szórására, de ez a sűrűségek növekedésével lecsökken, és teljesen eltűnik. Következésképpen e konkrét szimulációnál a fogyasztásbeli egyenlőtlen-

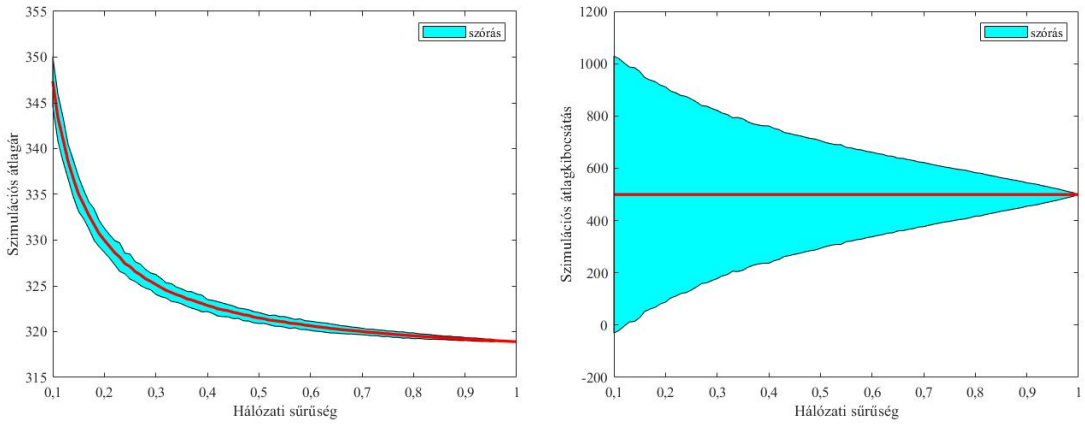
ségek nem eredményeznek tartós mértékű termékár-heterogenitást a hálózat sűrűsödésével. Ha a termelékenységi vagy árérzékenységi paraméterek heterogének, akkor viszont nem figyelhetjük meg az egyensúlyi árak szórásának csökkenését, tehát a termelékenység vagy a fogyasztói érzékenység heterogenitása a hálózat sűrűsödése ellenére fenntarthatja az árheterogenitást. Megjegyzem, hogy a negyedik eset paraméter-választásánál az egyensúlyi kibocsátások heterogenitása sem szűnik meg a teljes hálózatban.

5.18. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, első eset)



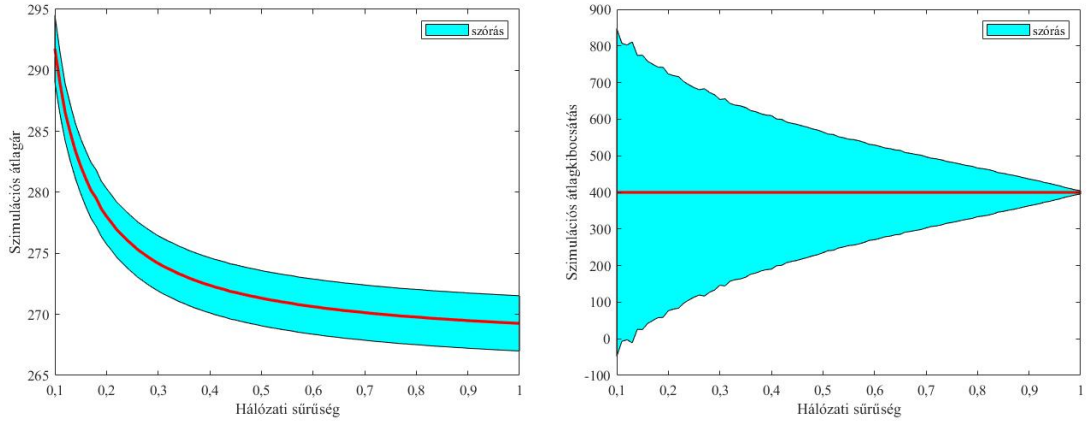
(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Termékárak heterogenitása

5.19. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, második eset)



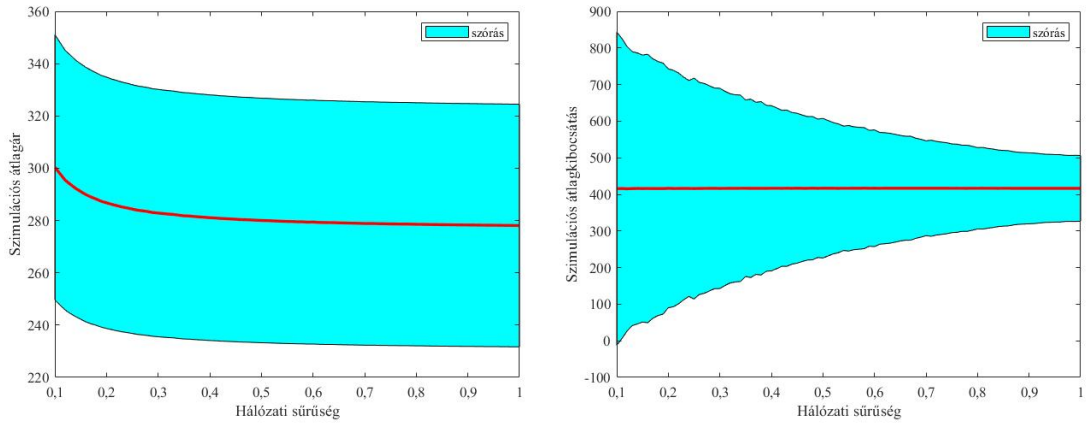
(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Termékárak heterogenitása

5.20. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, harmadik eset)



(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Termékárak heterogenitása

5.21. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (első csoport, negyedik eset)

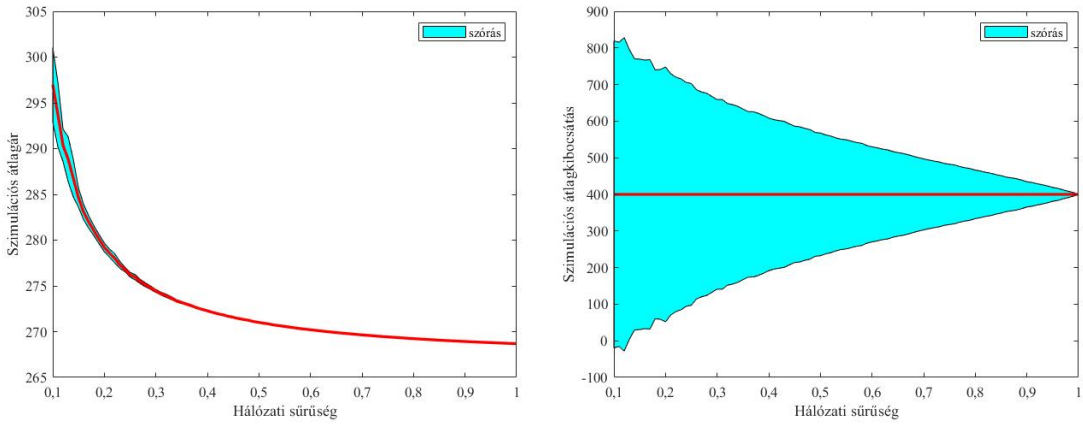


(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Termékárak heterogenitása

A második csoportba tartozó ábrákról lényegében hasonló állítások fogalmazhatók meg, mint az első csoport szimulációiról. Elsősorban a 5.22. (a) ábrán megmutatkozó eltérésére hívom fel a figyelmet. Utóbbi szimulációnál láthatjuk, hogy a hálózati sűrűségek alacsonyabb tartományában az egyensúlyi árak nagyobb mértékű heterogenitást mutatnak. Következésképpen egy olyan példával állunk szemben, ahol a paraméterek heterogenitása nem játszik szerepet, azonban a hálózati paraméter megváltoztatása szemmel látható változást idézett elő az árak szóródásában. Hasonló jelenség figyelhető meg a 5.2 és 5.10. ábra kapcsán is. E kiemelt példán túl arra is felhívom a figyelmet, hogy most tárgyalt szimulációinkban viszonylag alacsony hálózati sűrűségeknél az átlagárak magasabbak, valamint a termékárak szórása is nagyobb. Intuitíve racionálisnak tűnik azt gondolni,

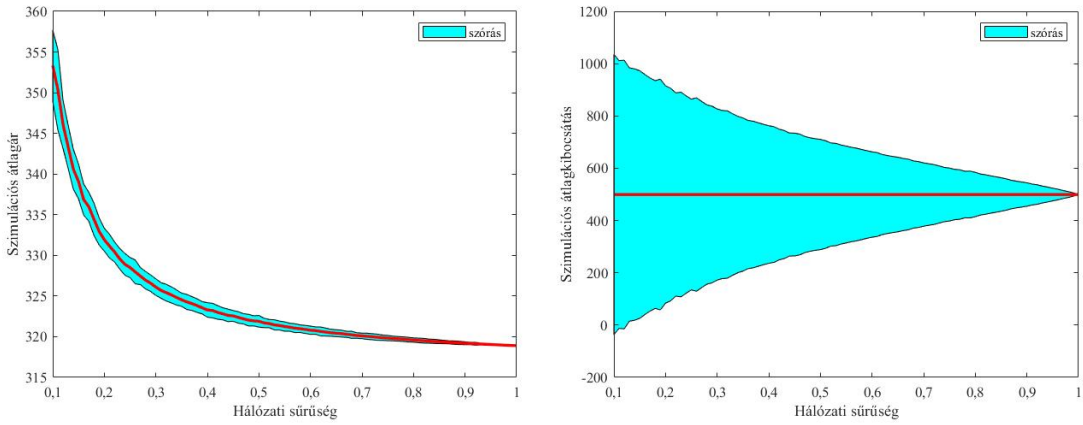
hogy egy aszimmetrikusabb struktúra képes felerősíteni az egyes termelők közötti árazásbeli eltéréseket, amely sejtéssel a szóban forgó szimulációk egybevágnak. A kibocsátások tekintetében azonban semmiféle radikálisabban szembetűnő változást nem látunk. Ennek kapcsán nyilvánvaló, hogy az átlagkibocsátások tekintetében nem is lehetséges változás, hiszen az egyes fogyasztói összkeresletek szummája azonos tetszőleges hálózati szerkezet mellett, emiatt pedig az átlagnak is azonosnak kell maradnia. Ami viszont meglepő lehet, hogy a szórást illetően sem látható említésre méltó változás.

5.22. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, első eset)



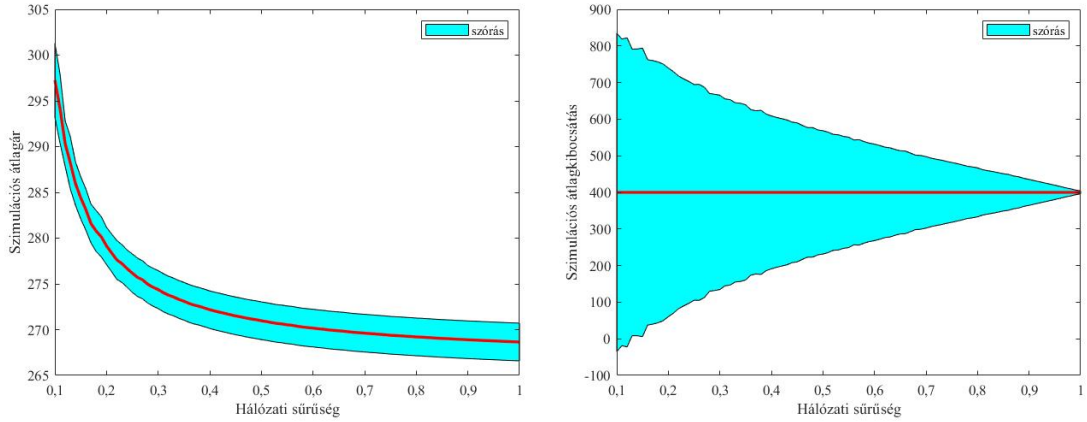
(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Kibocsátások heterogenitása

5.23. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, második eset)



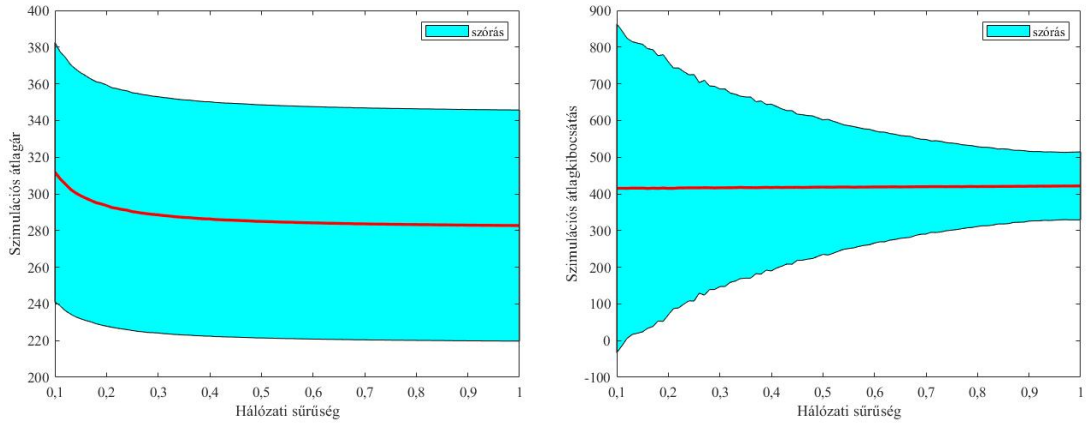
(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Kibocsátások heterogenitása

5.24. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, harmadik eset)



(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Kibocsátások heterogenitása

5.25. ábra. Egyensúlyi termékárak és kibocsátások heterogenitása a hálózati sűrűség függvényében (második csoport, negyedik eset)



(a) Termékárak heterogenitása **(b)** Kibocsátások heterogenitása

Ennek az alfejezetnek több tanulsága is van. Egyrészt rámutat arra, hogy a hálózati pozíció (centralitás) még nem feltétlenül magyarázza meg teljes egészében az egyensúlyi ár- illetve kibocsátásvektor alakulását, kifejezetten gondolok itt a heterogenitás hatására. Ez elmélyíti korábbi elméleti jellegű vizsgálódásomat oly módon, hogy további konkrét példákkal egészíti ki azokat, és e részek olyan oldalát láttatja, amely korábbiakban nem feltétlenül rajzolódott ki. Egy további tanulság az is, hogy a hálózati pozícióból fakadó hatást megváltoztathatja az egyes paraméterek heterogenitása. Ez a változás példáinkban jelentősebb következményekkel járt az egyensúlyi árvektor vonatkozásában, mint az egyensúlyi kibocsátásvektor tekintetében. Ugyan a 5.2–5.17. ábrák elemzésekor nem

tértem ki rá, e záró összegzésben mégis megemlítem, hogy az egyensúlyi kibocsátások hisztogramjai az első néhány sűrűségnél erősen aszimmetrikusak. Az aszimmetria ugyan megjelenik egyes árhisztogramoknál is, de utóbbiaknál nem tűnik olyan markánsnak a jelenség, mint az említett egyensúlyi kibocsátások megfelelő eseteinél. Végül kiemelem azt a megfigyelésemet, hogy a konkrét paraméter-választás függvényében (különösen kiemelve a paraméter-heterogenitást) a hálózat sűrűsége egyes szimulációim során jelentősebb vagy kevésbé figyelemre méltó kapcsolatot mutat az egyensúlyi termékár és kibocsátás szóródását illetően.

Zárásul hangsúlyozni szeretném, hogy e példák alapján messzemenő következtetésekbe nem bocsátkozhatok, arra azonban alkalmasak, hogy az egyes modellek lehetséges viselkedésére rámutassanak. A szóban forgó jelenségek segíthetnek elindulni a hálózati szerkezet piaci szerepének alaposabb megértésében. Utóbbihoz tehát véleményem szerint a szimulációk biztosította eredmények figyelembe veendő támpontot képeznek.

5.5. Az interakciós hálózati szerkezet becslése valós áreloszlás alapján

Ebben az alfejezetben egy kalibrációs eljárást mutatok be, amelynek során egy valós áreloszlást próbálok reprodukálni annak átlagát, szórását, ferdeségét és kurtózisát figyelembe véve. Lényegét tekintve tehát, ez az alfejezet képezi a dolgozat igazi empirikus egységét. Ebben a részben szeretnék válaszolni a disszertáció elején megfogalmazott harmadik empirikus kérdésre. A gondolatmenetet amennyire csak módomban áll, igyekszem részletesen ismertetni.

Az imént említett reprodukciónak az az elsődleges célja, hogy bizonyos mértékben betekintést engedjen a konkrét piac mögötti, közvetlenül nem megfigyelhető interakciós hálózati struktúrába. Ennek érdekében egy konkrét áreloszlásból indulok ki. Az ehhez szükséges empirikus adatok egy viszonylag nagy adatbázis kisebb szeletét alkotják. A használt adatok keresztmetszetiek, hiszen nem az árdinamika érdekes, hanem egy időpontban bizonyos termékek árai. Az összehasonlíthatóság szempontjából előnyös, hogy az általam figyelembe vett értékek olyan homogén termékhez kapcsolódónak, amelyek általában nem mutatnak túlságosan nagy területi változékonyságot. Ezt azért fontos kiemelni, mert még egyneműnek tűnő termékkategóriák tekintetében is kimutatható a kapcsolódó egyedi termékek árainak jelentékeny heterogenitása (Broda és Weinstein 2008). Az említett adatoknak a lehetőségem szerinti legpontosabb, ugyanakkor lényegre törő bemutatása az alábbiakban következik.

Az általam használt, szóban forgó adatbázis egy (egyebek mellett) üzemanyagárakat tartalmazó kiterjedtebb méretű adatbázis része.[31] Az üzemanyagárak (95-ös oktánszámú

[31] A szóban forgó adatállomány a 73777 témaszámú „A magyar üzemanyagpiac árképzési és versenymo-

benzinárak) adatbázisa a Magyarország területén működő üzemanyagtöltő-állomásokhoz kapcsoló heti frekvenciájú adatokat tartalmazza a 2006.10.06.–2008.12.19. időszakból. Ez összesen 93936 időpontot jelent, melyek közül azonban csak 90932 tényleges adat van, tehát 3004 időponthoz nincs adat rendelve (ezek nem ismertek). Jómagam az ismert adatok közül 2006 utolsó negyedévére (2006.10.06.–2016.12.29. [2006Q4]) vonatkozó árakat vettem figyelembe. Ez összesen 11583 adatot jelent. Ezekből elkészítettem a töltőállomásonkénti átlagárakat, és végső soron azzal dolgoztam. Ez összesen 912 áradatot jelent. Megjegyzem, hogy Farkas (2017) az általam is használt adatbázist alapul véve egyebek mellett kimutatta, hogy a kiskereskedelmi árrések, valamint benzinkútjellemzők között pozitív összefüggés van. Ezt azt jelenti, hogy a határköltséget azonosnak feltételezve a benzinkutak karakterisztikája részben magyarázatul szolgál az árheterogenitásra. Következésképpen érdemes arra számítani, hogy ez a soron következő elemzésben is megmutatkozik, és a korábbi eredményekkel összhangban rávilágít arra, hogy nem csak a hálózati szerkezet felelős az árak diszperziójáért.

Előrebocsátom, hogy a kalibrációk többségében a hálózati sűrűséget 10%-os értéken rögzítem. Ahol a hálózati sűrűséget változóként szerepeltetem a kalibrációs eljárás folyamán, azt külön megemlítem. A paraméterbecslés során rendre az alábbi sorrendiséget követem:

1. paraméterbecslés első lépése a szórást illetően;

2. paraméterbecslés véglegesítése a ferdeség és a kurtózis vonatkozásában.

E szóban forgó kétlépcsős eljárásnak külön alegységeket szánok a mostani empirikus blokkon belül.

Megjegyzem, hogy a kalibrációs eljárás minden olyan lépésében, amelyben egyensúlyi árvektort generál az algoritmus, a szimulált egyensúlyi árvektort rögzített paraméterértékek mellett összesen 100 példányban állítjuk elő ($s = 100$). Ha $\mathbf{p}_j$ a j-edik szimulációs futtatás eredményeként előálló szimulált egyensúlyi árvektort jelöli, akkor a $\mathbf{p}_j$ vektorok átlagának, szórásainak, ferdeségeinek és kurtózisainak átlagát rendre átlagolt átlagárnak, szórásnak, ferdeségnek és kurtózisnak hívom a továbbiakban ($j = 1, 2, \ldots, s$).

A kalibráció szempontjából további alapparamétereket is megadok, amelyek az egyes kalibrációs lépésekben peremfeltételként jelennek meg. Ezek a paraméterek és értékeik a következők: $M = 912$, $N = 10912$, $\epsilon = 5$, $\gamma = 60$, $\alpha = 0{,}3$. Látható tehát, hogy $N - M = 10000$ fogyasztóval számolok, mert ennél jelentősen magasabb érték az algoritmus futási idejét vélhetően túlságosan megnövelné. Az α paraméter értékét leszámítva,

delljének vizsgálata" címet viselő OTKA-kutatás (vezető kutató: Dr. Csorba Gergely), valamint a Központi Statisztikai Hivatal (KSH) településstatisztikai adatbázisának (T-STAR) adataiból áll össze (Farkas 2017). Az adatállomány további jellemzőiről részletesebb információ található a hivatkozott cikkben.

a fennmaradó kettő paraméter értékének megválasztása esetlegesnek mondható, ezeket illetően nem követtem semmiféle konvenciót vagy elméleti megfontolást.

Megjegyzem, hogy az ismertetett paraméterek közül a későbbiekben csak ϵ tekintetében fogok heterogenitást feltételezni, de mindaddig amíg erre kifejezetten nem utalok, e rögzített értékekkel számolok. Ezenkívül látható, hogy ω munkabér értékét nem adtam meg. Ezt a paraméterbecslés első lépésében fogom meghatározni, méghozzá a kalibrációnál felhasznált empirikus adatállomány átlagának segítségével.

5.5.1. A paraméterbecslés első lépése

Az ω paraméter értékének becséléséhez néhány megjegyzést fűzök. Feltételezem, hogy az interakciós hálózati struktúra független részstruktúrákra bontható. Ennek az életszerűségét igazolja, ha meggondoljuk, hogy vélhetően egy adott körzetben (például város, városrész) élő fogyasztók a körzet üzemanyagtöltő-állomásait veszik igénybe, így a körzetenként kapott részstruktúrák egymással nincsenek interakcióban, vagy az interakció mértéke nem tekinthető lényegesnek. Ha ezek a részstruktúrák közel teljes gráffal reprezentálhatók, akkor homogén paraméterezést feltételezve a 4.4. Tétel következménye szerint az ár ismeretében ω kiszámítható. Tehát a

$$p = \frac{M(N-M)\gamma}{\epsilon(M-1)(N-M)} + \frac{\omega}{\alpha} = \frac{M\gamma}{\epsilon(M-1)} + \frac{\omega}{\alpha} \tag{5.41}$$

képletet használva, ω paramétert ki lehet fejezni:

$$\omega = \alpha\left[p - \frac{M\gamma}{\epsilon(M-1)}\right] \tag{5.42}$$

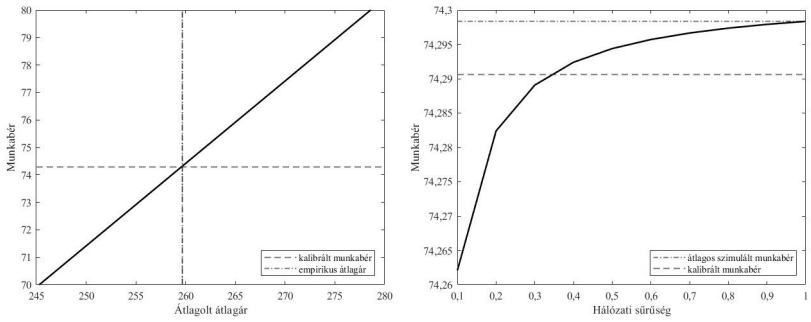
Az empirikus adatok szerint az átlagár két tizedesjegyre kerekítve 259,68, ezt véve p-nek ω két tizedesjegyre kerekített értéke 74,30. Jómagam azonban a kalibráció során a MATLAB által számított pontosabb empirikus átlagárat, valamint a munkabér meghatározásához közvetlenül a (5.42) képletet használom.

Ezzel az eljárással kiszámítottam tehát a munkabér értékét. Ahhoz, hogy még inkább alátámasszam a becslés helyességét, két szimulációt futtatok le, amelynek eredményét a 5.26. ábra mutatja. A szimulációnál $I_1 = 0{,}8$ és $I_2 = 0$ értékek mellett döntöttem. Ezt a választásomat a további releváns esetekben is fenntartom, de a pontosabb indoklásra csak alább térek ki.

A 5.26. (a) ábra úgy áll elő, hogy a – változónak tekintett – munkabér különböző értékei mellett kiszámítom az egyes átlagolt átlagárakat. Utóbbi értékek adják a grafikon pontjainak első koordinátáit, míg a második koordinátákat a munkabérek képezik. Az ábrán feltüntettem a kalibrált munkabér és az empirikus átlagár értékeinek megfelelő vízszintes

és függőleges egyeneseket is. Ezeknek az egyeneseknek a metszéspontja lényegét tekintve a grafikonra esik. A 5.26. (b) ábra tekintetében visszafelé gondolkodtam. Ezt az ábra úgy áll elő, hogy a – változónak tekintett – hálózati sűrűség különböző értékei mellett kiszámítom a munkabér azon értékeit, amelyeket figyelembe véve mindig teljesül, hogy az átlagolt átlagár pontosan az empirikus átlagárral egyenlő. Utóbbi ábrán látható, hogy a felrajzolt grafikon értékkészlete viszonylag szűk intervallumban mozog, amely tartomány legkisebb értéke 74,2621, legnagyobb értéke pedig 74,2984. Következésképpen a munkabérek említett módon kiszámított értékei nem tekinthetők igazán érzékenynek a hálózati sűrűség változására. Bármely sűrűség mellett a 74,30 nagyságú érték elfogadhatónak tűnik. Ezekre az ábrákra a kalibráció pontosságát mutató összehasonlítási alapként tekinthetünk a fentebb kiszámított munkabér szempontjából.

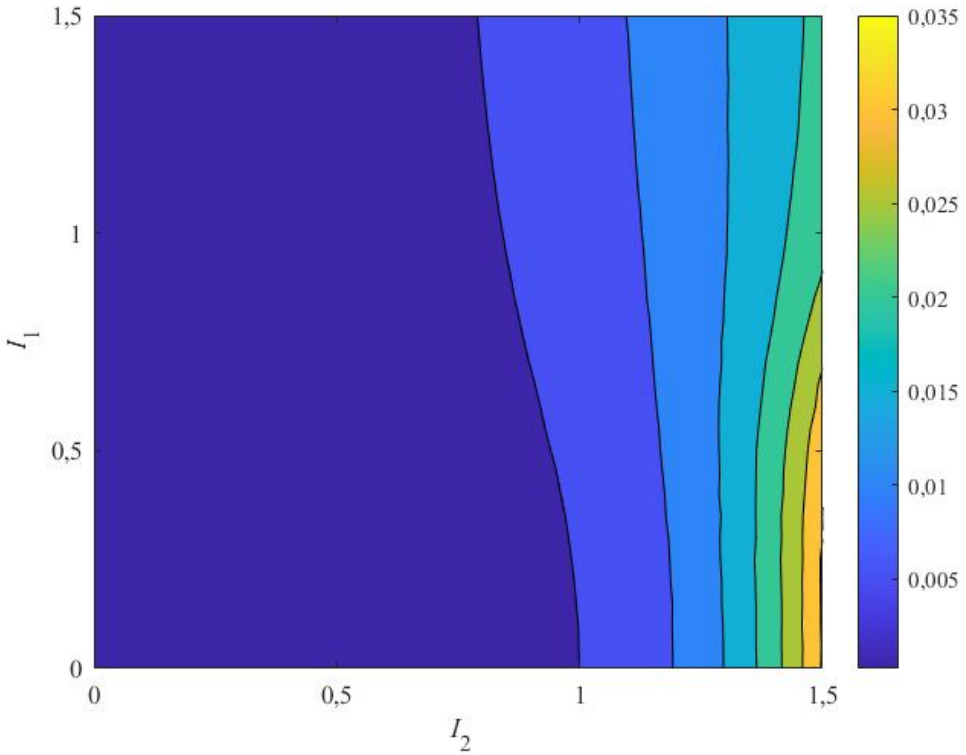
5.26. ábra. A munkabér értékének alakulása



(a) Rögzített sűrűség ($\varrho = 0{,}1$) **(b)** Változó sűrűség

Az iméntiek folytatásaként rátérek annak a vizsgálatára, hogy miként alakul az átlagolt szórás akkor, ha I_1 és I_2 értékei rendre nem haladhatják meg az 1,5 küszöböt. A szimuláció során a lépésközt 0,05-nak veszem, következésképpen $I_1 = I_2 = 0{,}05k$, ahol $k = 0, 1, \ldots, 30$. A szóban forgó feltételek mellett kapott eredmény szintvonaltérképét a 5.27. ábra mutatja.

5.27. ábra. Az átlagolt szórás szintvonaltérképe



E szintvonaltérképből többféle információ olvasható le, amelyek közül most csak az általam legfontosabbnak tartott kettőt említem:

1. az a tartomány amelyen belül a szórás mozog, mértékét tekintve irreleváns az empirikus adatok szórásának értékéhez képest (utóbbi megközelítőleg 3,83);

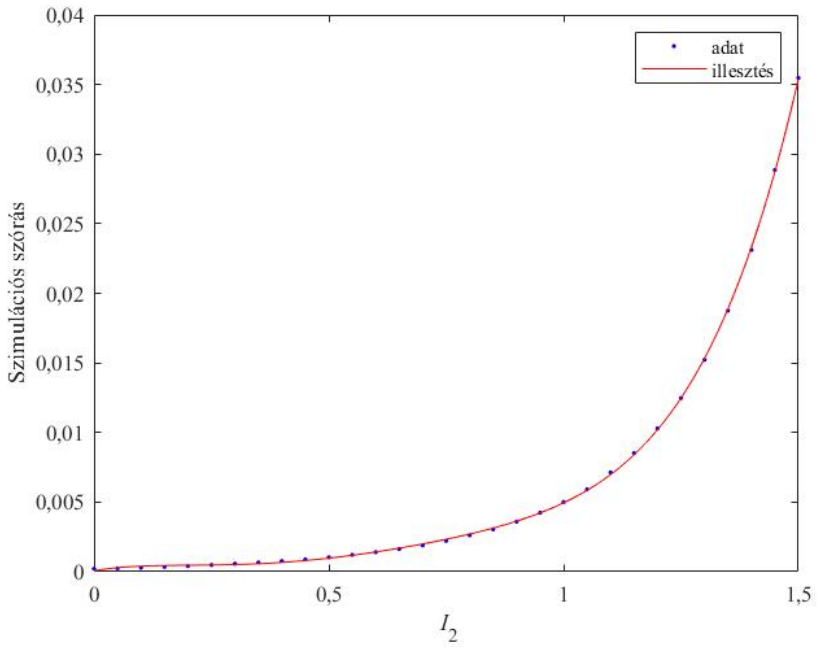
2. a legnagyobb szórásértéket jól láthatóan akkor kapjuk, ha $I_1 \in [0, 1/2]$ és $I_2 \in [1, 3/2]$.

A szintvonaltérkép tekintetében felhívom a figyelmet még egy olyan érdekes jelenségre, amely közvetlenül nem, esetleg csak nehezen olvasható le arról. A szimuláció végeredményeként adódó 31×31-es szórásmátrix arról tanúskodik, hogy megadható az $I_1, I_2 \leq 1{,}5$ paraméterek egy olyan küszöbértéke, amelyre a legmagasabb szórásérték $I_1 = I_2$ feltétel mellett adódik. A szóban forgó tartományban tehát akkor a legmagasabb a szórás, ha az interakciós hálózati struktúra mind termelői, mind pedig fogyasztói oldalról aszimmetrikus. Ez a kétoldali aszimmetria a legmagasabb szórás szempontjából azonban az említett küszöbérték felett eltűnik.

Észszerűnek tűnik extrapolációval megállapítani, hogy I_2 mely értéke mellett kapnánk az empirikus adatok fentebb megadott szórását. A meglévő szimulációs kimenetek közül $I_1 = 0$ esetet feltételezve MATLAB segítségével ötödfokú polinomot illesztek a 31×31-es

mátrix értékeinek megfelelő részhalmazára.[32] Az illesztés tekintetében az R-négyzet és igazított R-négyzet mutatók értéke 0,9999, az $RMSE$-mutató pedig $1{,}0353 \times 10^{-4}$ nagyságú. A polinomillesztés grafikonjának részletét a 5.28. ábra mutatja. A szóban forgó extrapolációs polinom a $I_2 = 3{,}1488$ helyen veszi fel az empirikus adatokból számított szórásértéket.

5.28. ábra. Az átlagolt szórásra illesztett extrapolációs polinom grafikonja ($I_2 \leq 1{,}5$)



Ezek után nézzük meg az átlagolt ferdeség és a kurtózis szintvonaltérképét. Ez esetben is feltételezem, hogy I_1 és I_2 legfeljebb 1,5, valamint a lépésköz 0,05. A szintvonaltérképeket a 5.29. ábra mutatja. E szintvonaltérképek tekintetében három megjegyzést teszek:

1. a 5.29. (a)–(b) ábrákat és a háttérül szolgáló 31×31-es kimeneti mátrixokat figyelembe véve az $I_1 = 0$, $I_2 = 3{,}1488$ paraméter-választás nem tűnik megfelelőnek;

2. a szóban forgó két szintvonaltérkép az első alapjául szolgáló 31×31-es mátrixban lévő legkisebb érték $-0{,}1682$ ($I_1 = 1{,}5$, $I_2 = 0$), amely jelentősen alacsonyabb az empirikus adatok ferdeségénél ($-0{,}6824$);

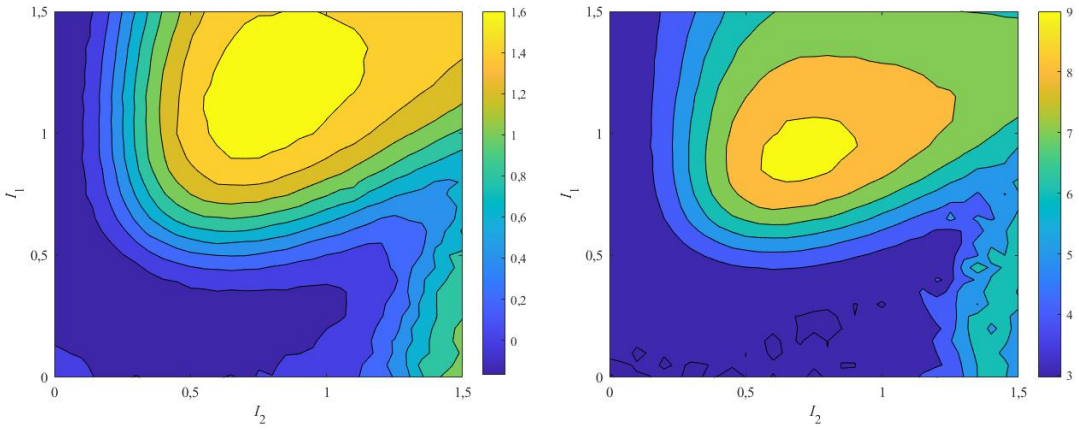
3. az empirikus adatok kurtózisa 3,2034, amelyhez az átlagolt kurtózisokat mutató szintvonaltérkép alapjául szolgáló 31×31-es mátrixban több viszonylag közeli érték található (például 3,2010, ha $I_1 = 0{,}5$, $I_2 = 0{,}1$; 3,2084, ha $I_1 = 0{,}45$, $I_2 = 0$).

A 5.29. ábra és a kapcsolódó megjegyzések alapján $I_1 = 0{,}8$ és $I_2 = 0$ választással élve az átlagolt ferdeségre $-0{,}1477$, míg az átlagolt kurtózisra pedig 3,4296 értéket kaptam. Ez

[32] A szoftver az illesztett polinom együtthatóinak meghatározásánál 95%-os megbízhatósági szinten veszi figyelembe a konfidencia-intervallumokat.

magyarázza, hogy miért rögzítettem I_1 és I_2 paramétereket a fentebb közölt értékeken.

5.29. ábra. Az átlagolt ferdeség és kurtózis szintvonaltérképe



(a) Az átlagolt ferdeség szintvonaltérképe **(b)** Az átlagolt kurtózis szintvonaltérképe

5.5.2. A paraméterbecslés véglegesítése

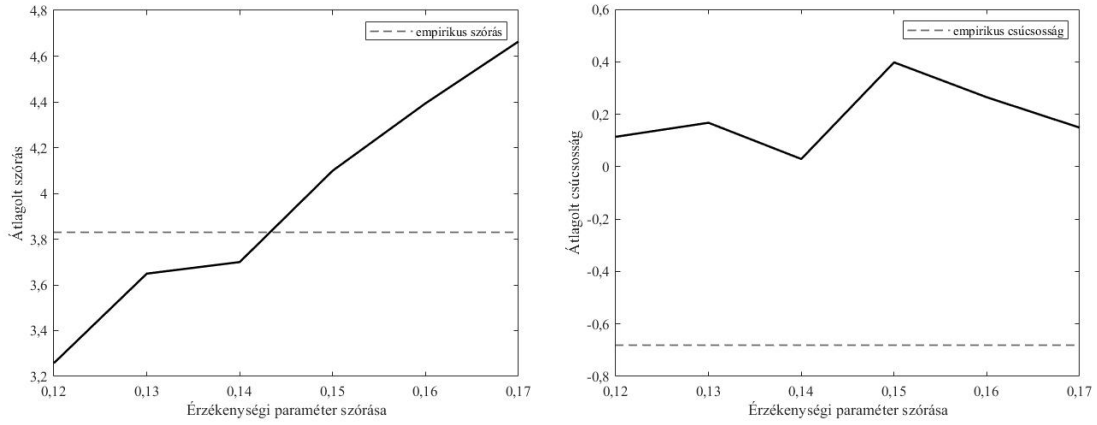
Tekintettel arra, hogy paramétereink homogenitása mellett nem tudtuk elfogadhatóan kalibrálni empirikus adataink szórását, ha $I_1, I_2 \in [0, 3/2]$, ezért az ϵ árérzékenységi paramétert heterogénnek tekintem a továbbiakban. Feltesszük, hogy $\epsilon = 5 + z\varepsilon$ alakban írható fel, ahol $z > 0$ és $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Keressük azt a z értéket, amely a fentinél jobb kalibrációt biztosít, feltéve hogy $I_1 = 0{,}8$ és $I_2 = 0$.

A 5.30. (a)–(c) ábrák alapján $z = 0{,}14$ értéket választom. A szóban forgó ábrák alapját képező szimulációkban a z paraméter lépésköze 0,1, azaz a szimulációk kimeneti értékeit a $z = 0{,}12 + 0{,}1k$ helyeken határoztuk meg, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

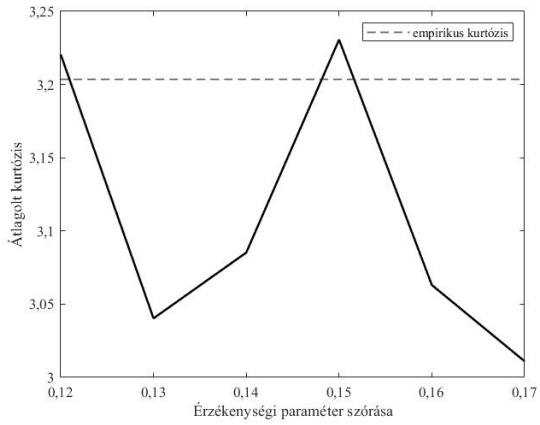
A $z = 0{,}14$ helyen az ábrák által reprezentált függvényértékek két tizedesjegyre kerekítve rendre a következők lesznek: átlagolt szórás: 3,70; átlagolt ferdeség: 0,03; átlagolt kurtózis: 3,09. Az átlagolt szórást és kurtózist elfogadhatónak tartom, azonban az átlagolt ferdeség alapján az eloszlás lényegében szimmetrikus, és nem mutatja azt az enyhe ferdeséget, amit az empirikus adatok. Ennek ellenére összességében elfogadom a $z = 0{,}14$ választás melletti kalibrációs kimeneteket.

Szót ejtek még a kalibrált átlagról. Megnézem, hogy amennyiben $z = 0{,}14$, akkor milyen mértékben módosulnak a 5.26. (a)–(b) ábrák. Minden ábra mögötti szimuláció során az árérzékenységi paraméterek ugyanazon heterogén szerkezetét vettem figyelembe, mint amelyet a 5.30. (a)–(c) ábrák kapcsán használtam. A munkabér értékeinek alakulását $z = 0{,}14$ esetén a 5.31. (a)–(b) ábrák mutatják.

5.30. ábra. Az átlagolt szórás, ferdeség és kurtózis kapcsolata az árérzékenységi paraméter szórásával



(a) Az átlagolt szórás alakulása **(b)** Az átlagolt ferdeség alakulása

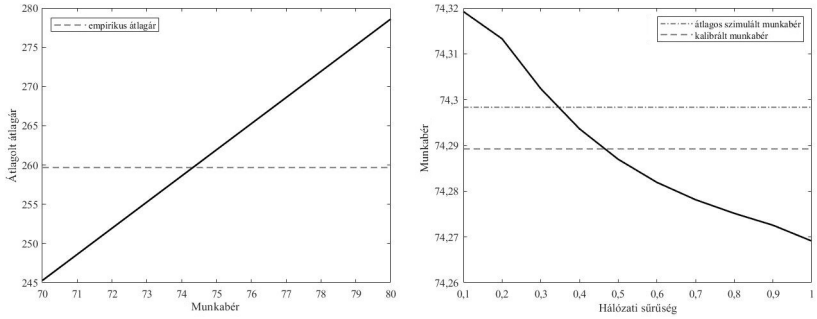


(c) Az átlagolt kurtózis alakulása

A kapott ábrák tekintetében a megfelelő, korábbi grafikonokhoz képest a 5.31. (b) ábrán látható szembetűnő eltérés. Az utóbbi ábrán lévő grafikon értékkészlete jól látható módon módosult, azonban ezt az eltérést nem tekintem lényegesnek. Következésképpen az kalibrált átlagárat nem módosítom.

A kalibrációt bemutató alfejezetet illetően összességében elmondható, hogy az alapmodell alapján, homogén paraméterértékek mellett nem volt lehetséges elfogadható kalibrációt adni. Különösen a szórás tekintetében tapasztaltam komolyabb különbséget. A helyzet jelentős mértékben javult, amikor feloldottam a paraméter-homogenitást. Az árérzékenységi paraméter heterogenitását feltételezve már találtam olyan paraméter-struktúrát, amely mellett a kalibrációt elfogadhatóbbnak tartom.

5.31. ábra. A munkabér értékének alakulása az árérzékenységi paraméter heterogenitása mellett



(a) Rögzített sűrűség (ϱ = 0,1) **(b)** Változó sűrűség

A jelenlegi empirikus rész valós piaci szituációból indulva kívánt következtetni a konkrét piac interakciós hálózati szerkezetére, ennek jellemzőire. Tette ezt jól meghatározott körülmények között, ezért ahogy írtuk a fentiekből általános következtetés nem vonható le. A vizsgálódások arra mégis rámutattak, hogy pusztán a hálózati jellemzők nem magyarázzák a heterogenitást, vagyis az áreloszlás segítségével közvetlenül nem következtethetünk vissza a hálózati struktúra karakterisztikájára.

6. Összegzés, következtetések

Dolgozatomban egy, az egyensúlyt kitüntetett módon figyelemmel kísérő piac- és játékelméleti modellkeretbe ágyazott, közvetlen interakciókra épülő heterogén szereplős piacszerkezeti modellt vizsgáltam. A modellben két szereplőtípus (termelők és fogyasztók) nem feltétlenül teljes interakciós hálózati szerkezetét tekintettem, amelyben a struktúra adottságként jelent meg. Az alapmodell analízisét lényegét tekintve egy játékelméleti probléma felírásával kezdtem.

A disszertációval azokhoz a kutatási törekvésekhez szerettem volna csatlakozni, amelyek a piacmodellezést realisztikusabb alapokra kívánják helyezni, ezzel feladva némely idealisztikus feltevést (például szimmetria, jól informált szereplők). Itt konkrétabban azon szakirodalmak köre által létrehívott diskurzusra gondolok, amely hálózatokon értelmezett játékelméleti modellek segítségével kívánnak válaszolni az egyensúlyi értékek és a mögöttes interakciós hálózati szerkezet kapcsolatára.

Elemzésem célja az volt, hogy válaszokat találjak a bevezető részben feltett kutatási kérdésekre. Analízisem az oligo- vagy monopolisztikus kontextusban megjelenő modell kapcsán elsősorban az analitikus vizsgálódásra helyezte a hangsúlyt. Ennek során központi jelentősége volt az egyensúlyi árvektor meghatározásának, ezenkívül az egyensúlyi kibocsátásvektornak, a nyereségek alakulásának, valamint a hálózati szerkezetet jellemző mutató bevezetésének. A megértést számos numerikus példával igyekeztem elmélyíteni. Dolgozatom szerves részét képezte továbbá a szimulációs és kalibrációs egység, amely szintén a modell alaposabb megértését illetve a mögöttes interakciós hálózati struktúra szerepének kiemelését volt hivatott szolgálni.

Munkám egy részét az alapmodellből kiinduló modellváltozatok bemutatására szántam, amelyek bizonyos szempontból kiterjesztéseknek, általánosításoknak is tekinthetők. Megjegyzem, hogy ezek vizsgálódásomnak ugyan jórészt mellékszálai, mégis olyan elemek, amelyeket a teljességre törekvés igénye hívott életre. Összességében tehát, a szóban forgó részek a disszertációt gazdagítják.

Az ismertetett modell újdonságát viszonylagos részletességgel a 3.1. táblázat is mutatja, amelyre újfent felhívom a figyelmet. Ebben összegyűjtöttem azokat a legfontosabb szempontokat, amelyek mentén a relevánsnak ítélt szakirodalmak modelljeivel összevetettem a disszertáció modelljét. Ez alapján látható volt, hogy legalább egy szempont szerint biztosan eltér a disszertáció modellje a vizsgált cikkek modelljeitől. Ezen előnyök mellett a szóban forgó modellnek természetesen vannak hátrányai is. Ebben a vonatkozásban például már az alapmodell bemutatásának elején leszögeztem, hogy az nem alkal-

mazható minden lehetséges piacszerkezet tekintetében.

A továbbiakban azokat a kutatási kérdéseket és alkérdéseket tekintem át pontról pontra, amelyeket dolgozatom elején vetettem fel. Ezek ugyanis elemzésem fő csapásirányát jelölték ki. Az egyes kérdések és alkérdések után következik a vizsgálódásomból eredő válasz.

6.1. Első kutatási kérdés megválaszolása

Kimutattam, hogy a disszertációban definiált modellben egyetlen egyensúly ár- és kibocsátásvektor létezik. A szóban forgó vektorok tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyok. Eredményem azért különösen fontos, mert rámutat egy olyan minimális kritériumra (nevezetesen, hogy minden termelőtől kell fogyasszon legalább egy olyan fogyasztó, amelyik e termelőn kívül legalább még egy másiktól is fogyaszt), amelyik lehetővé teszi, hogy ez az egyensúlyi ár- és kibocsátásvektor egyértelműen meghatározható legyen. Megjegyzem, hogy a feladat nehézsége abban állt, hogy az interakciós hálózati struktúra nem feltétlenül teljes, ami a megoldás megtalálását jelentősen megnehezíti.

6.1.1. Első kutatási alkérdés megválaszolása

Megmutattam, hogy az egyensúlyi árvektor nemnegatív. Emiatt az eleget tesz a korábban definiált absztrakt piacszerkezet első követelményének. Ennek ellenére megjegyzem, hogy a negatív áraknak lehet ugyan közgazdasági tartalmat tulajdonítani, és ennek alapján következtetéseket levonni, de az alapmodell ilyen jelenségek vizsgálatára terjedt ki.

Az egyensúlyi árak nemnegativitásához (sőt pozitivitásához) több úton is eljutottam (lásd a B. függeléket), ahogy a létezést és egyértelműséget is különféle módokon igazoltam. Ez persze inkább módszertani szempontból érdekes. Ugyanis rámutat olyan megközelítési módokra, amelyek hasonló feladatoknál alkalmazhatók.

6.1.2. Második kutatási alkérdés megválaszolása

Ezt a kérdést több oldalról jártam körbe. Első lépésben bevezettem egy centralitásmutatót, amely a hálózatot a hálózati pozíció nézőpontjából volt hivatott megragadni, majd ezt a mutatót kapcsolatba próbáltam hozni az egyensúlyi árvektorral. Ugyan egy bizonyos pontig eljutottam pusztán a formalizmus útján, ez azonban konkrét számpéldák nélkül még nem tette lehetővé, hogy erre a kérdésre megalapozottabban válaszolhassak. Ezért az elemzés egy további része ezeknek a számításoknak a segítségével történt.

Kimutattam példák által, hogy a bevezetett centralitás-mutató nem feltétlenül arányos az egyensúlyi árakkal. Sőt egyes példák szerint még a piacon domináns módon jelenlévő termelő hatására sem mutatnak az egyensúlyi árak érdemi heterogenitást. Ez a helyzet akkor sem változik meg lényegesen, ha a domináns termelő mellett a gazdaságban van egy domináns fogyasztó is. Ezek a vizsgáltok egyben a kisméretű számpéldák hátrányaira is rámutattak, ezért szükségét éreztem annak, hogy jóval több és nagyobb méretű példákat elemezzek. Azonban az utóbbiak révén kapott eredményeket részleteiben csak a harmadik kutatási kérdésnél ismertetem.

6.1.3. Harmadik kutatási alkérdés megválaszolása

A modell tekintetében ellenőrzésre várt, hogy az eleget tesz-e az absztrakt piacszerkezet által támasztott második kritériumnak. Ennek érdekében igazoltam, hogy a modell a szóban forgó kívánalomnak megfelel. Magától értetődik, hogy az egyedi keresett mennyiségek nemnegativitásának kimutatása fontos a modell szempontjából, hiszen ennek híján annak értelmezése problematikus lehet. Így e kérdés megválaszolása kritikus volt a további vizsgálódásaim szempontjából.

Megjegyzem, hogy az absztrakt piacszerkezet harmadik feltételének elemzése szükségtelen. Az ugyanis az alapmodell konstrukciójából és az egyedi keresett mennyiségek nemnegatív voltából következik. Így erre külön ki sem tértem.

6.1.4. Negyedik kutatási alkérdés megválaszolása

A negyedik kutatási alkérdésre történő válaszkeresés során is első lépésben a formalizmus útját választottam. Az interakciós hálózati szerkezet megragadása szempontjából a már fentebb említett centralitást alkalmaztam. Mindezt azonban a jelen kérdést illetően is ki kellett egészítenem konkrét számpéldákkal a korábbiakban megfogalmazott megalapozási igény miatt.

Ezen kalkulációk alapján elég egyértelműnek tűnik, hogy egyes vállalatok domináns piaci jelenléte releváns módon befolyásolja, módosítja az egyensúlyi kibocsátások alakulását. Utóbbi esetben az egyensúlyi kibocsátásvektor szerkezete eltorzul. Az intuícióval összhangban, azoknál a vállalatoknál, amelyektől többen vásárolnak, a kibocsátás egyensúlyi szintje érdemben magasabb, mint a kisebb fogyasztói körrel rendelkezőknél. A vizsgált esetek mindegyikében a példák azt mutatták, hogy az egyensúlyi kibocsátásvektor arányos egy speciális diagonális mátrixszal. Ettől eltérést még akkor sem tapasztaltam, ha a kapcsolati mátrix alapján a domináns termelő mellett azonosítható volt egy domináns fogyasztó is, tehát, ha az interakciós hálózati szerkezet mind termelői, mind pedig fogyasztói oldalról jelentősebb aszimmetriát mutatott.

6.2. Második kutatási kérdés megválaszolása

Mielőtt erre a kérdésre részletekbe menően válaszolnék, felhívom rá a figyelmet, hogy a dolgozatban szereplő szimulációkhoz az alapul szolgáló kapcsolati mátrixot a disszertáció 5.3. alfejezetében ismertetett eljárás segítségével generáltam. Ezt azért tartottam fontosnak megjegyezni, mert a kapcsolati mátrix által reprezentált hálózatot a generálás peremfeltételeit jelentő paraméterek segítségével szabályozni lehet. Így vizsgálni lehetett az egyes kimeneteket a hálózati aszimmetria függvényében is. A szóban forgó algoritmust használtam a szimulációkat és kalibrációt felvonultató teljes fejezetben. Másrészt megjegyzem, hogy amennyiben egy szimulációban a munka termelékenységi paramétere termelőnként nem azonos, akkor a vonatkozó eredmények interpretációjánál szereplő megállapításokat – vélhetően alacsonyabb hálózati sűrűségek esetén – kellő körültekintéssel szükséges kezelni, ugyanis előfordulhat, hogy valamelyik egyedi kereslet egyensúlyi értéke negatív. Ezek után következzék a kérdés megválaszolása.

A szimulációk során látható volt, hogy melyek azok az esetek, amikor a vizsgált centralitásvektor és az egyensúlyi árvektor gyenge kapcsoltban van, továbbá melyek azok, amikor ez a kapcsolat erősnek mondható. Azt tapasztaltam, hogy mindez nagymértékben függ a paraméter-heterogenitástól illetve vélhetően az interakciós hálózati szerkezettől is.

Az említett kapcsolat alakulása különösen az egyensúlyi árak eloszlása tekintetében figyelemfelkeltő. Abban az esetben ugyanis, ha a paraméterekben nem jelentkezik heterogenitás, az egyensúlyi árvektor és centralitásvektor jóval erősebben korrelál szimulációimban, mint a szóban forgó paraméterek heterogenitása mellett.

Az egyensúlyi kibocsátások vizsgálatakor arra jutottam, hogy ebben az esetben korántsem az a helyzet, mint ami az egyensúlyi áraknál volt. Utóbbi esetekben a szimulációs eredmények konzisztensebb képet mutattak. Ugyan, itt sem beszélhetünk rendkívül erős korrelációról, viszont ez a kapcsolat láthatóan kevésbé függ a paraméterezés homogén vagy heterogén voltától. Szimulációim egyetlen esetben sem mutatnak olyan fokú drasztikus változást az egyensúlyi kibocsátások és a centralitás együttmozgása között, mint amilyenre az egyensúlyi termékáraknál volt példa bizonyos paraméter-heterogenitás mellett.

A szimulációs eredményeim továbbá arra is rámutattak, hogy az egyensúlyi árak és kibocsátások kölcsönhatása erősségüket tekintve az esetek egy részében az egyensúlyi árak és centralitások kapcsolatának mértékétől nem térnek el drasztikusan. Voltak azonban olyan szimulációk, ahol nem ez volt a helyzet. Utóbbira azokban az esetekben figyelhettünk fel, amelyekben az árérzékenységi paraméter heterogén volt. Ebből persze az is következik, hogy a kapcsolat nem csak interakciós hálózati szerkezettől függ. Mindenesetre megállapítható több szimuláció vonatkozásában, hogy az egyensúlyi árak és kibocsátások

közel sem korrelálatlanok, bár a korreláció mértéke és iránya szimulációról szimulációra változik.

A második kérdést illetően vizsgáltam az egyensúlyi termékárak és kibocsátások eloszlásának kurtózisát is. Eredményeim alapján azt gondolom, hogy az interakciós hálózati struktúra generálását befolyásoló kezdeti paraméterek hatást gyakorolhatnak az egyes eloszlások kurtózisára. Az erről való megalapozottabb állásfoglaláshoz azonban további elemzés szükségeltetne.

E kérdés más aspektusból való megválaszolása esetemben oly módon történt, hogy a piacszerkezet mögött meghúzódó interakciós hálózati struktúra sűrűségének és az egyensúlyi termékárak és kibocsátások kapcsolatának viszonyát elemeztem. Szimulációim során heterogenitást szinte mindegyik esetben láttam. Állandó paraméterek mellett, az árheterogenitás relatíve alacsony hálózati sűrűséget illetően jelentkezett említésre méltó módon, míg magasabb sűrűségeknél lényegében eltűnt. A heterogenitás mértékét ugyan nem számszerűsítettem, azonban a megfelelő ábrákról jól látható, hogy paraméterek heterogenitása jelentős mértékben meghatározza az árak heterogenitást. Megjegyzésre érdemes még, hogy bizonyos esetekben az eloszlás jelentősebb ferdesége volt tapasztalható. Az egyensúlyi kibocsátások eloszlása minden szimulációs esetben heterogenitásról tanúskodik. Ugyan ezekben az esetekben is meghatározó a sűrűség, azonban az egyensúlyi árak eloszlásaihoz képest a kibocsátások jelentősebb szóródása tapasztalható az egyes ábrákon, bármely szóba jövő sűrűséget tekintve. Az egyensúlyi kibocsátásoknál szintén látható bizonyos hisztogramokon az eloszlás ferdesége, amely egyes esetekben igen jelentős mértékű.

Az egyensúlyi árak és kibocsátások eloszlásának vizsgálatán kívül, kiegészítő szimulációkat is végeztem. Ezek megerősítették a termékárak és kibocsátások szórása, heterogenitása tekintetében megállapított jelentős különbségeket bizonyos peremfeltételek mellett. Azonban azt is mutatják, hogy a szóban forgó szóródásokat a paraméter-heterogenitás nagyban meghatározza. Megjegyzem továbbá, hogy állandó paraméterértékeknél, úgy tűnik, hogy a hálózati aszimmetria változása is befolyásolja a szimulációs kimeneteleket. Utóbbi a termékárak esetében szúrhat igazán szemet.

6.3. Harmadik kutatási kérdés megválaszolása

Az utolsó kérdés ugyan első olvasásra kevésbé tűnik egzaktnak és jól körülhatároltnak, azonban jelentősége annál nagyobb. Ha ugyanis fel lehet mutatni, hogy a modell empirikus szempontból is releváns lehet, akkor ez az eredmény annak gyakorlati alkalmazhatóságát, magyarázó erejét növelheti. Az utolsó kutatási kérdésre az disszertáció korábbi egységeihez jól illeszkedve, konkrét peremfeltételek mellett válaszoltam. Azonban a szűkre

szabott keretek nem tették lehetővé az eredmény általánosítását illetve messzemenő következtetések levonását. Ennek ellenére bizonyos mértékig rávilágítottak a disszertáció elméleti részének korlátaira, alkalmazhatóságára.

A mögöttes, interakciós hálózati szerkezet megállapítása céljából valós áradatokat vettem figyelembe, és a paraméterek olyan konstellációját kerestem, amelyek mellett szimulációkból származó eloszlások bizonyos kalibrált jellemzői megközelítőleg visszaadják a tapasztalati eloszlás megfelelő jellemzőit. Arra az eredményre jutottam, hogy az általam végrehajtani kívánt kalibráció kizárólag a hálózati szimmetriát/aszimmetriát tekintetbe véve, viszont a többi paramétert rögzítve nem megvalósítható. Ennek a sikertelenségnek az egyik legfontosabb tanulsága, hogy a hálózati struktúra szimmetriája/aszimmetriája egyedül nem képes produkálni a kívánt kimenetet.

Emiatt megpróbáltam a kalibrációt úgy elvégezni, hogy az árérzékenységi paramétert heterogénné tettem. Ennek során találtam a heterogenitásnak (szórásnak) olyan nagyságát, amelynél az empirikus eloszlásjellemzők becslése jelentősen javult. Így adott paraméterek mentén meghatározott interakciós hálózati struktúra és megfelelő szórású árérzékenységi paraméterek mellett, a kapott kalibrációs eredményeket már elfogadhatónak minősítettem.

6.4. Záró gondolatok, kitekintés

Összességében kijelenthető, hogy nagyrészt meg tudtam felelni annak a célnak, amelyet dolgozatom elején kitűztem. Vagyis lehetőségeimhez mérten igyekeztem válaszolni azokra a legfontosabb kérdésekre, amelyek kijelölték elemzésem fő csapásirányát. Láthatóvá vált, hogy az interakciós hálózati struktúrák kutatása, szerepe fontos, hiszen a felszínre hozhatnak olyan eredményeket, új szempontokat, amelyeket egyes klasszikus piacszerkezeti vizsgálatok elfednek. Disszertációm egyik lényeges megállapításaként azt is láthattuk, hogy a hálózati struktúra nem egyformán érezteti hatását az egyes egyensúlyi értékeknél, így kizárólag a piacszerkezet analízisére támaszkodva magyarázni piaci jelenségeket, vélhetően túlságosan leegyszerűsítő és elhibázott. Ugyanakkor arról sem szabad megfeledkezni, hogy eltérő módszertan eltérő válaszokat adhat bizonyos kérdésekre, következésképp e munka eredményei sem tekinthetők perdöntőnek, hanem további kutatásra kell hogy ösztönözzenek. Ennek a folyamatnak a során nem árt azonban szem előtt tartani, hogy minden módszertannak megvannak a maga korlátai, továbbá azt sem, hogy a pusztán kvantitatív megközelítés a maga egyoldalúsága miatt biztosan nem vezet el a tanulmányozott struktúrák lényegi megértéséhez. Úgy vélem, hogy ez utóbbi lehetséges következtetést és az ennek nyomán történő újragondolást is támogathatja a jelenlegi munkám.

Az előbbieket összegezve és számos szakirodalomi forrást figyelembe véve elmondható, hogy megfelelő kiegészítéssel és körültekintéssel talán nem haszontalan kombinált elemzési módszerek kidolgozása. Ez egyben azt is jelenti, hogy egyes vizsgált piaci jelenségek tekintetében tanácsos a kapcsolati struktúrát szintén figyelembe venni. Ennek segítségével ugyanis árnyaltabb képet kaphatunk az analizált területről, ami a szakpolitikák szempontjából megalapozottabb döntéshozatalt tehet lehetővé. Mindezzel összhangban a disszertáció továbbfejlesztési lehetőségei részben a komplex rendszereket figyelembe vevő újabb piacszerkezeti modellek megkonstruálásának és elemzésének irányában kereshetők. E tekintetben a lehetőségekhez mérten érdemes arra törekedni, hogy az irreális feltételeket feloldva a vizsgált problémáknak valósághűbb leírásai szülessenek. Ugyanakkor ismételten alá szeretném húzni, hogy az egyoldalú kvantitatív szemlélet kvalitatív szempontok mentén történő erőteljes újragondolását is szükségesnek vélem.

Felhasznált irodalom

Abolhassani, M., Bateni, M. H., Hajiaghayi, M., Mahini, H., Sawant, A., 2014. Network Cournot Competition. In: Liu, T.-Y., Qi, Q., Ye, Y. (eds.), Web and Internet Economics: 10th International Conference, WINE 2014, Beijing, China, December 14–17, 2014, Proceedings. Springer, Cham, pp. 15–29.

Acemoglu, D., Azar, P. D., 2020. Endogenous Production Networks. Econometrica 88 (1), 33–82.

Acemoglu, D., Carvalho, V. M., Ozdaglar, A., Tahbaz-Salehi, A., 2012. The Network Origins of Aggregate Fluctuations. Econometrica 80 (5), 1977–2016.

Acemoglu, D., Ozdaglar, A., Tahbaz-Salehi, A., 2016. Networks, Shocks, and Systemic Risk. In: Bramoulle, Y., Galeotti, A., Rogers, B. (eds.), The Oxford Handbook of Economics and Networks, Ch. 21. Oxford University Press, New York, NY, pp. 569–607.

Acharya, S., Dogra, K., 2020. Understanding HANK: Insights from a PRANK. Econometrica 88 (3), 1113–1158.

Ackerman, F., 2002. Still dead after all these years: interpreting the failure of general equilibrium theory. Journal of Economic Methodology 9 (2), 119–139.

Allen, B., Hellwig, M., 1986a. Bertrand–Edgeworth Oligopoly in Large Markets. The Review of Economic Studies 53 (2), 175–204.

Allen, B., Hellwig, M., 1986b. Price-Setting Firms and the Oligopolistic Foundations of Perfect Competition. The American Economic Review 76 (2), 387–392.

Amiti, M., Itskhoki, O., Konings, J., 2019. International Shocks, Variable Markups, and Domestic prices. The Review of Economic Studies 86 (6), 2356–2402.

Antman, S. S., 1983. The influence of elasticity on analysis: modern developments. Bulletin of the American Mathematical Society 9 (3), 267–291.

Aoyagi, M., 2018. Bertrand competition under network externalities. Journal of Economic Theory 178, 517–550.

Ballester, C., Calvó-Armengol, A., Zenou, Y., 2006. Who's Who in Networks. Wanted: The Key Player. Econometrica 74 (5), 1403–1417.

Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae 3 (1), 133–181.

Barabási, A.-L., Albert, R., 1999. Emergence of Scaling in Random Networks. Science 286 (5439), 509–512.

Barabási, A.-L., Albert, R., Jeong, H., 1999. Mean-field theory for scale-free random networks. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 272 (1), 173–187.

Barabási, A.-L., Albert, R., Jeong, H., 2000. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 281 (1–4), 69–77.

Barabási, A.-L., Pósfai, M., 2016. Network Science. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Başar, T., Srikant, R., 2002. A Stackelberg Network Game with a Large Number of Followers. Journal of Optimization Theory and Applications 115 (3), 479–490.

Belhaj, M., Bramoullé, Y., Deroïan, F., 2014. Network games under strategic complementarities. Games and Economic Behavior 88, 310–319.

Bimpikis, K., Ehsani, S., İlkılıç, R., 2019. Cournot Competition in Networked Markets. Management Science 65 (6), 2467–2481.

Bloch, F., Quérou, N., 2013. Pricing in social networks. Games and Economic Behavior 80, 243–261.

Bonacich, P., 1972. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. Journal of Mathematical Sociology 2 (1), 113–120.

Bonacich, P., 1987. Power and Centrality: A Family of Measures. American Journal of Sociology 92 (5), 1170–1182.

Borenstein, S., Rose, N. L., 1994. Competition and Price Dispersion in the U.S. Airline Industry. Journal of Political Economy 102 (4), 653–683.

Brakman, S. A., Heijdra, B. J. (eds.), 2004. The Monopolistic Competition Revolution in Retrospect. Cambridge University Press, New York, NY.

Bramoullé, Y., Kranton, R., D'amours, M., 2014. Strategic Interaction and Networks. American Economic Review 104 (3), 898–930.

Broda, C., Weinstein, D. E., 2008. Understanding International Price Differences Using Barcode Data, https://www.nber.org/system/files/working_papers/w14017/w14017.pdf.

Brualdi, R. A., Cvetković, D., 2009. A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications. Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL.

Békési, L., Köber, C., Kucsera, H., Várnai, T., Világi, B., 2016. The macroeconomic forecasting model of the MNB. MNB Working Papers 4, Magyar Nemzeti Bank, Budapest.

Caiani, A., Russo, A., Palestrini, A., Gallegati, M. (eds.), 2016. Economics with Heterogeneous Interacting Agents: A Practical Guide to Agent-Based Modeling. Springer International Publishing Switzerland.

Calvó-Armengol, A., Patacchini, E., Zenou, Y., 2009. Peer Effects and Social Networks in Education. The Review of Economic Studies 76 (4), 1239–1267.

Candogan, O., Bimpikis, K., Ozdaglar, A., 2010. Optimal Pricing in the Presence of Local Network Effects. In: Saberi, A. (ed.), Internet and Network Economics, 6th International Workshop, WINE 2010, Stanford, CA, USA, December 13-17, 2010, Proceedings, Vol. 6484. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, DE, pp. 118–132.

Catanzaro, M., Pastor-Satorras, R., 2005. Analytic solution of a static scale-free network model. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems 44 (2), 241–248.

Chen, Y., Zhang, T., 2011. Equilibrium price dispersion with heterogeneous searchers. International Journal of Industrial Organization 29 (6), 645–654.

Chen, Y.-J., Zenou, Y., Zhou, J., 2018. Competitive pricing strategies in social networks. The RAND Journal of Economics 49 (3), 672–705.

Chowdhury, P. R., 2003. Bertrand–Edgeworth equilibrium large markets with non-manipulable residual demand. Economics Letters 79 (3), 371–375.

Chowdhury, P. R., 2008. Bertrand–Edgeworth equilibrium with a large number of firms. International Journal of Industrial Organization 26 (3), 746–761.

Chowdhury, P. R., 2009. Bertrand competition with non-rigid capacity constraints. Economics Letters 103 (1), 55–58.

Clay, K., Krishnan, R., Wolff, E., 2001. Prices and Price Dispersion on the Web: Evidence from the Online Book Industry. The Journal of Industrial Economics 49 (4), 521–539.

Corbett, C. J., Karmarkar, U. S., 2001. Competition and Structure in Serial Supply Chains with Deterministic Demand. Management Science 47 (7), 966–978.

Cornes, R., Hartley, R., 2012. Fully aggregative games. Economics Letters 116 (3), 631–633.

Cowan, R., Jonard, N. (eds.), 2003. Heterogenous Agents, Interactions and Economic Performance. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, DE.

Csermely, P., 2009/2006. Weak Links: The Universal Key to the Stability of Networks and Complex Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, DE.

Dasgupta, P., Maskin, E., 1986a. The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory. The Review of Economic Studies 53 (1), 1–26.

Dasgupta, P., Maskin, E., 1986b. The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, II: Applications. The Review of Economic Studies 53 (1), 27–41.

De Martí, J., Zenou, Y., 2015. Network games with incomplete information. Journal of Mathematical Economics 61, 221–240.

Debreu, G., 1959. Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. John Wiley & Sons, New York, NY.

Deák, S., Levine, P., Pearlman, J., Yang, B., 2017. Internal Rationality, Learning and Imperfect Information. Discussion Papers in Economics DP 8/17, University of Surrey, Surrey, UK.

Dixit, A., Norman, V., 1980. Theory of International Trade. A Dual, General Equilibrium Approach. Cambridge University Press, New York, NY.

Dixit, A. K., Stiglitz, J. E., 1977. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. The American Economic Review 67 (3), 297–308.

Dixon, H., 1984. The Existence of Mixed-Strategy Equilibria in a Price-Setting Oligopoly with Convex Costs. Economics Letters 16 (3–4), 205–212.

Dixon, H., 1987. Approximate Bertrand Equilibria in a Replicated Industry. The Review of Economic Studies 54 (1), 47–62.

Dixon, H., 1990. Bertrand–Edgeworth Equilibria when Firms Avoid Turning Customers Away. The Journal of Industrial Economics 39 (2), 131–146.

Dixon, H. D., 1992. The Competitive Outcome as the Equilibrium in an Edgeworthian Price–Quantity Model. The Economic Journal 102 (411), 301–309.

Embrechts, P., McNeil, A. J., Straumann, D., 2002. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: Dempster, M. A. H. (ed.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, New York, NY, pp. 176–223.

Ethier, W. J., 1982. National and International Returns to Scale in the Modern Theory of International Trade. The American Economic Review 72 (3), 389–405.

Farkas, R., 2017. Empirikus reakciógörbe-becslés a magyar kiskereskedelmi benzinpiacon. Közgazdasági Szemle 64 (3), 267–284.

Fudenberg, D., Tirole, J., 1991. Game Theory. Cambridge, MA.

Gabay, D., Moulin, H., 1980. On the uniqueness and stability of Nash-equilibria in noncooperative games. In: Bensoussan, A., Kleindorfer, P., Tapiero, C. S. (eds.), Applied Stochastic Control of Econometrics and Management Science, Ch. 9. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, NE, pp. 271–293.

Gabszewicz, J. J., Vial, J.-P., 1972. Oligopoly "A la Cournot" in a General Equilibrium Analysis. Journal of Economic Theory 4 (3), 381–400.

Galí, J., 2008. Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle. An Introduction to the New Keynesian Framework. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Gerschgorin, S., 1931. Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk (6), 749–754.

Goh, K.-I., Kahng, B., Kim, D., 2001. Universal behavior of load distribution in scale-free networks. Physical Review Letters 87 (27), 278701–1–278701–4.

Grossman, G. M., Helpman, E., 1991. Innovation and Growth in the Global Economy. The MIT Press, Cambridge, MA.

Gárdonyi, M., 2018. Bevezetés a Katolikus Egyház történetébe. 5. kiad., JEL Könyvkiadó, Budapest.

Handbury, J., Weinstein, D. E., 2015. Goods Prices and Availability in Cities. The Review of Economic Studies 82 (1), 258–296.

Harsányi, J. C., 1967. Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III: Part I. The basic model. Management Science 14 (3), 159–182.

Hartman, P., Stampacchia, G., 1966. On some non-linear elliptic differential-functional equations. Acta Mathematica 115 (1), 271–310.

Harville, D. A., 1997. Matrix Algebra Form a Statistican’s Perpective. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY.

Hosszú, Z., Mérő, B., 2017. An agent based Keynesian model with credit cycles and countercyclical capital buffer. Tech. rep., Magyar Nemzeti Bank (Central Bank of Hungary).

Inada, K.-I., 1963. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. The Review of Economic Studies 30 (2), 119–127.

Jackson, M. O., 2008. Social and Economic Networks. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Jensen, M. K., 2010. Aggregative games and best-reply potentials. Economic Theory 43 (1), 45–66.

Kaplan, G., Menzio, G., 2015. The Morphology of Price Dispersion. International Economic Review 56 (4), 1165–1206.

Kaplan, G., Moll, B., Violante, G. L., 2018. Monetary policy according to HANK. American Economic Review 108 (3), 697–743.

Kaplan, W., 1991. Advanced calculus, 4. kiad. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.

Katz, L., 1953. A New Status Index Derived from Sociometric Analysis. Psychometrika 18 (1), 39–43.

Kirman, A. P., Vriend, N. J., 2001. Evolving market structure: An ACE model of price dispersion and loyalty. Journal of Economic Dynamics and Control 25 (3–4), 459–502.

Koga, M., Yoshino, K., Sakata, T., 2019. Strategic Complementarity and Asymmetric Price Setting among Firms. Bank of Japan Working Paper Series (19-E-5).

Kornai, J., 2010. Hiánygazdaság – többletgazdaság: Tanulmány a piac elméletéről – I. rész. Közgazdasági Szemle 57 (11), 925–957.

Kreps, D. M., 1990. A course in microeconomic theory. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Krugman, P., 1991. Increasing Returns and Economic Geography. Journal of Political Economy 99 (3), 483–499.

Krugman, P. R., 1979. Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade. Journal of international Economics 9 (4), 469–479.

Kónya, I., 2015. Fejezetek a haladó makroökonómiából. Az RBC-DGSE modellcsalád és a munkapiac makroökonómiája. Pécsi Tudományegytem Közgazdaságtudományi Kar, Pécs, `http://works.bepress.com/istvan_konya/17`.

Laczkovich, M., T. Sós, V., 2007. Analízis II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Lee, F. S., 1999. Post Keynesian Price Theory. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Levitan, R., Shubik, M., 1972. Price Duopoly and Capacity Constraints. International Economic Review, 111–122.

Li, X., Chen, J., Ai, X., 2019. Contract design in a cross-sales supply chain with demand information asymmetry. European Journal of Operational Research 275 (3), 939–956.

Mangasarian, O., 1965. Pseudo-Convex Functions. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control 3 (2), 281–290.

Maskin, E., 1986. The Existence of Equilibrium with Price-Setting Firms. American Economic Review 76 (2), 382–386.

Maskin, E., Tirole, J., 1987. A Theory of Dynamic Oligopoly, III: Cournot Competition. European Economic Review 31 (4), 947–968.

Maskin, E., Tirole, J., 1988. A Theory of Dynamic Oligopoly, II: Price Competition, Kinked Demand Curves, and Edgeworth Cycles. Econometrica, 571–599.

Mohammed, R., 2018. The Good Better Best Approach to Pricing. Harvard Business Review 96 (5), 106–115.

Nagurney, A., 1999. Network Economics: A Variational Inequality Approach. Revised 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

Nash, J., 1951. Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics, 286–295.

Nash, J. F., 1950. Equilibrium Points in n-Person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36 (1), 48–49.

Nyíri, T., 1977. A filozófiai gondolkodás fejlődése. Szent István Társulat, Budapest.

Osborne, M. J., Pitchik, C., 1986. Price Competition in a Capacity-Constrained Duopoly. Journal of Economic Theory 38 (2), 238–260.

Osborne, M. J., Rubinstein, A., 1994. A Course in Game Theory. The MIT Press, Cambridge, MA.

Press, S. J., 2005. Appied Multivariate Analysis. Using Bayesian and Frequentist Methods of Inference, 2. kiad. Dover Publications, Inc., Mineola, NY.

Reynolds, S. S., Wilson, B. J., 2000. Bertrand–Edgeworth Competition, Demand Uncertainty, and Asymmetric Outcomes. Journal of Economic Theory 92 (1), 122–141.

Roberts, J., Sonnenschein, H., 1976. On the Existence of Cournot Equilbrium without Concave Profit Functions. Journal of Economic Theory 13 (1), 112–117.

Romer, P. M., 1990. Endogenous Technological Change. Journal of Political Economy 98 (5, pt. 2), S71–S102.

Rothschild, M., Stiglitz, J., 1976. Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information. The Quarterly Journal of Economics 90 (4), 629–649.

Ruffin, R. J., 1971. Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour. The Review of Economic Studies 38 (4), 493–502.

Révész, T., Zalai, E., 2012. Fogalmak, módszerek: A számszerűsített általános egyensúlyi (CGE) modellekről. Szigma 43 (1–2), 73–106.

Salle, I., Yildizoglu, M., Zumpe, M., Sénégas, M.-A., 2012. Modelling social learning in an agent-based new keynesian macroeconomic model. Tech. Rep. 2012-20, Cahiers du GREThA.

Saloner, G., 1987. Cournot Duopoly with Two Production Periods. Journal of Economic Theory 42 (1), 183–187.

Salop, S., Stiglitz, J., 1977. Bargains and Ripoffs: A Model of Monopolistically Competitive Price Dispersion. The Review of Economic Studies 44 (3), 493–510.

Sebestyén, T., Szabó, B., 2022. Market interaction structure and equilibrium price heterogenity in monopolistic competition. Netnomics, https://doi.org/10.1007/s11066-022-09155-5.

Sherman, J., Morrison, W. J., 1950. Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix. Annals of Mathematical Statistics 21 (1), 124–127.

Simaan, M., Cruz, J. B., 1973a. Additional Aspects of the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games. Journal of Optimization Theory and Applications 11 (6), 613–626.

Simaan, M., Cruz, J. B., 1973b. On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games. Journal of Optimization Theory and Applications 11 (5), 533–555.

Simon, H. A., 1955. A Behavioral Model of Rational Choice. The Quarterly Journal of Economics 69 (1), 99–118.

Sutton, R. I., Staw, B. M., 1995. What theory is not. Administrative Science Quarterly, 371–384.

Szabó, B., Sebestyén, T., 2020. Egyensúlyi ár oligopolisztikus versenykörnyezetben, tökéletlen informáltság esetén. Alkalmazott Matematikai Lapok 37 (2), 247–263.

Szentmihályi, S., Világi, B., 2015. The Phillips curve – History of thought and empirical evidence. Financial and Economic Review 14 (4), 5–38.

Tasnádi, A., 2001. A Bertrand–Edgeworth-oligopóliumok: Irodalmi áttekintés. Közgazdasági Szemle 48 (12), 1081–1092.

Tesfatsion, L., 2001. Introduction to the special issue on agent-based computational economics. Journal of Economic Dynamics and Control 25 (3–4), 281–293.

Tirole, J., 1988. The Theory of Industrial Organization. The MIT Press, Cambridge, MA.

Ushchev, P., Zenou, Y., 2016. Price Competition in Product Variety Networks. Nota di Lavoro 59.2016, Fondazione Eni Enrico Mattei, Milan, IT.

Ushchev, P., Zenou, Y., 2018. Price competition in product variety networks. Games and Economic Behavior 110, 226–247.

Vives, X., 1986. Rationing rules and Bertrand–Edgeworth equilibria in large markets. Economics Letters 21 (2), 113–116.

Váry, M., 2015. Piaci alkalmazkodás ragadós árak mellett – calvo-típusú ármerevség egy ágensalapú modellben. Közgazdasági Szemle 62 (1), 48–77.

Vörös, J., 2019. An analysis of the dynamic price-quality relationship. European Journal of Operational Research 277 (3), 1037–1045.

Wang, J., Shin, H., Zhou, Q., 2021. The optimal investment decision for an innovative supplier in a supply chain. European Journal of Operational Research 292 (3), 967–979.

Weick, K. E., 1995. What theory is not, theorizing is. Administrative Science Quarterly 40 (3), 385–390.

Woods, J., 1978. Mathematical economics: topics in multi-sectoral economics. Prentice Hall Press, London, UK.

Zalai, E., 2011. Matematikai közgazdaságtan I.: Általános egyensúlyi modellek és mikroökonómiai elemzések. 2. átdolgozott és bővített kiad., Akadémiai Kiadó, Budapest.

Zalai, E., 2012. Matematikai közgazdaságtan II.: Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések. 2. átdolgozott és bővített kiad., Akadémiai Kiadó, Budapest.

Zalai, E., 2014. Közgazdaság-tudomány és gazdálkodástudomány. Magyar tudomány 175 (8), 902–905.

Függelék

Ugyan a dolgozat főszövegében már említettem módszertani részleteket (lásd például a szakirodalmi bevezetőt), mégsem ismertettem azt a releváns módszertani bázist, amelyre a disszertáció során alapvetően alapozok. Ezért ebben a függelékben csokorba szedem a lényegesnek tekintett fogalmakat, eredményeket. A könnyebb átláthatóság érdekében először következik a nem gráf- és hálózatelméleti egység, majd jönnek hálózatokkal kapcsolatos fontosabb fogalmak.

A módszertani részeken túl a függelék tartalmazza azokat a kiegészítő bizonyításokat is, amelyek a főszövegben nem kaphattak helyet. (Az erre vonatkozó döntésemet a megfelelő helyen ismertettem.) Ezek a bizonyítások lényegüket tekintve az alapmodell egyensúlyi árvektorával kapcsolatosak.

A. Módszertani függelék

A.1. Vegyes fogalmak és eredmények

D.1. Definíció. Legyen adott egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor ($n \geq 1$), amelynek rendre euklideszi és végtelen normája az alábbi módon határozható meg:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.1a}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}, \tag{A.1b}$$

ahol $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\mathsf{T}$.

D.2. Definíció (Brualdi és Cvetković 2009 alapján)**.** Legyen $\mathbf{M}$ egy $n \times n$-es valós mátrix ($n \geq 1$), $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ sajátértékekkel. Ekkor e mátrix spektrálsugara a következőt jelenti:

$$\rho(\mathbf{M}) = \max\{|\phi_1|, |\phi_2|, \ldots, |\phi_n|\} \tag{A.2}$$

T.1. Tétel (Banach 1922 alapján, lásd még Laczkovich és T. Sós 2007)**.** [33] *Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres zárt halmaz ($n \geq 1$), $\mathbf{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ egy többváltozós vektorértékű függvény,*

[33] A $\|\cdot\|$ szimbólummal az euklideszi vagy a végtelen norma jelölendő.

továbbá $\|\mathbf{F}(\mathbf{k}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{k}_2)\| \leq q\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|$, *ahol* $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$ *és* $q < 1$. *Ekkor van olyan* $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$, *hogy* $\mathbf{F}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$.

D.3. Definíció (Antman 1983 alapján)**.** Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres korlátos és zárt halmaz ($n \geq 1$) és $\mathbf{H} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^n$ egy többváltozós vektorértékű függvény. Ekkor minden $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$ mellett a

$$\mathbf{H}(\mathbf{k})(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \geq 0 \tag{A.3}$$

egyenlőtlenséget, variációs egyenlőtlenségnek nevezzük.

T.2. Tétel (Spektrálfelbontás tétele, Kaplan 1991 alapján)**.** *Legyen* $\mathbf{M}$ *egy* $n \times n$*-es szimmetrikus és valós mátrix* ($n \geq 1$). *Ekkor* $\mathbf{M}$ *az* $\mathbf{N}\mathbf{\Phi}\mathbf{N}^\top$ *szorzatalakra bontható fel, ahol* $\mathbf{\Phi}$ *egy olyan diagonális mátrix, amely főátlójában* $\mathbf{M}$ *sajátértékei állnak, valamint az* $\mathbf{N}\mathbf{N}^\top$ *szorzat az egységmátrixszal egyenlő.*

T.3. Tétel (Kaplan 1991 alapján)**.** *Legyenek* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ *olyan egységnyi normájú vektorok, amelyek közül bármely két különbözőt kiválasztva, azok skaláris szorzata zérus. Ekkor minden* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *felbontható*

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i \tag{A.4}$$

módon, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *a szokásos módon értelmezett skaláris szorzat.*

T.4. Tétel (Parseval-formula, Kaplan 1991 alapján)**.** *Legyenek* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ *olyan egységnyi normájú vektorok, amelyek közül bármely két különbözőt kiválasztva, azok skaláris szorzata zérus. Ekkor minden* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *felírható*

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle^2 \tag{A.5}$$

módon.

D.4. Definíció (Brualdi és Cvetković 2009, Zalai 2012 alapján)**.** Legyen $\mathbf{M}$ egy $n \times n$-es valós mátrix ($n \geq 1$). Ezt a mátrixot irreducibilisnek nevezzük, ha az ennek alapján készített (irányított) gráf erősen összefüggő.[34] Másként azt is mondhatjuk, hogy $\mathbf{M}$ esetén szimultán sor- és oszlopcseréket végrehajtva az alábbi formára $\mathbf{M}'$ hozható:

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix}, \tag{A.6}$$

[34] Egy (irányított) gráf pontosan akkor erősen összefüggő, ha bármely csúcsából eljuthatunk tetszőleges másik csúcsába (Brualdi és Cvetković 2009).

ahol $\mathbf{X}_1$ és $\mathbf{X}_3$ legalább 1×1-es négyzetes mátrixok, $\mathbf{O}$ pedig egy csupa zérusból álló blokk.

T.5. Tétel (Woods 1978, Brualdi és Cvetković 2009, Zalai 2012 alapján)**.** [35] *Legyen* $\mathbf{M}$ *egy* $n \times n$*-es nemnegatív és irreducibilis mátrix* ($n \geq 1$)*.*[36] *Ekkor* $\mathbf{M}$*-nek van pozitív (domináns) sajátértéke, továbbá ehhez tartozó pozitív sajátvektora. Ha csak annyit teszünk fel, hogy* $\mathbf{M}$ *nemnegatív, akkor a domináns sajátérték nemnegatív, továbbá mindössze nemnegatív sajátvektor létezése garantálható.*

T.6. Tétel (Euler-tétel, Zalai 2011 alapján)**.** *Legyen* $f : [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ *egy* k*-ad fokon homogén függvény* ($n, k \geq 1$)*. Ekkor teljesül az alábbi összefüggés:*

$$kf(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i, \tag{A.7}$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \in [0, \infty)^n$.

A.2. Fontosabb hálózatos fogalmak

D.5. Definíció (Fokszám)**.** Egy irányítatlan gráffal reprezentált hálózat tetszőleges csúcsának fokszáma megegyezik a csúcshoz kapcsolódó élek számával.

D.6. Definíció (Hálózati sűrűség)**.** Egy irányítatlan gráffal reprezentált hálózat sűrűsége megegyezik az abban található élek összegének és a gráf maximális élszámának hányadosával.

D.7. Definíció (Sajátvektor-centralitás, vö. Bonacich 1972, Jackson 2008)**.** Egy irányítatlan gráffal illetve $\mathbf{A}$ kapcsolati mátrixszal reprezentált hálózat sajátvektor-centralitása az a normalizált $\mathbf{v}^{\text{dom}}$ sajátvektor, amely teljesíti az

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{\text{dom}} = \phi^{\text{dom}} \mathbf{v}^{\text{dom}} \tag{A.8}$$

mátrixegyenletet, ahol $\phi^{\text{dom}} \geq 0$ az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértéke.

B. Az egyensúlyi árvektorral kapcsolatos kiegészítő bizonyítások

A dolgozat főszövegében utaltam már rá, hogy az alapmodellbeli egyensúlyi árvektor létezésével és egyértelműségével foglalkozó (első) gondolatmenet egyes részleteit más

[35] Itt a Perron–Frobenius-tételek egyik legismertebb változatát emelem ki, csak azt mutatom be.

[36] Dolgozatom szempontjából lényegében az is elegendő lenne, ha nemnegatív és irreducibilis mátrix helyett pozitívat mondanék, ami az előbbinek egy speciális esete (lásd például Zalai 2012).

szempontból, más eszközökkel is megvilágítom. Ezek a fejtegetések lényegüket tekintve Szabó és Sebestyén (2020) munkájában található megfelelő részbizonyítások ismertetését jelentik. E törekvésnek az egyik értelme olyan módszertani eszközök bemutatása, megismertetése, amelyek az általam elemzett modell (4.23) alapproblémájához hasonló feladatok esetében segítséget nyújthatnak. Az egyes részbizonyításokban ezért kiemelem azokat az újdonságokat, amelyek eltérnek a már ismertetett gondolatmenettől. A függelék alábbi alfejezeteiben rendre a következő összefüggésekre, módszerekre támaszkodom:

1. Banach-féle fixponttétel;

2. variációs egyenlőtlenségek;

3. Perron–Frobenius-tételek.

B.1. Bizonyítás a Banach-féle fixpontétel segítségével

A mostani alfejezetben a Banach-féle fixponttételre (lásd Banach 1922) támaszkodva található egy elegáns kiegészítő bizonyítás a (4.28) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldhatóságára és a megoldás egyértelműségére. Megjegyzem továbbá, hogy a gondolatmenet során Acemoglu et al. (2016) munkájának függelékében található adekvát részlet ötletét adaptálom.

Tehát ebben a kiegészítő bizonyításban csak a stacionárius pont létezését igazolom, azt viszont nem, hogy ez megoldása is a (4.23) feladatnak, hiszen ehhez a másodrendű feltételek vizsgálta szükséges, azonban azt nem ismételem meg, hiszen korábban már szó volt róla. Látni fogjuk továbbá, hogy ennek a kiegészítő bizonyításnak lesz még egy érdekes és sokatmondó hozadéka, amely miatt ezt a részeredményt különösen jelentősnek tartom a három kiegészítő bizonyítás közül. Erről az említett következményről a bizonyítást követően teszek említést, amely az egyensúlyi árvektort megadó mátrixegyenlet mellett lehetőséget ad olyan algoritmus konstruálására, amelyik a kívánt megoldást előállítja.

Bizonyítás. Első lépésben átrendezéssel kifejezem a p_i termékárat a (4.28) egyenletből az alábbi módon ($i = 1, 2, \ldots, M$):

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\gamma_j}{2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\sum_{j=1}^{N-M} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k}{2\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} + \frac{\omega}{2\alpha} \tag{B.1}$$

Ennek az átalakításnak a során felhasználom, hogy

$$\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{k=1}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k - p_i\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} - p_i\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = \sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k$$

$$+\, p_i\left[\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij} - \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})\right] = \sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}p_k \tag{B.2}$$

$$-\, 2p_i\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})$$

Néhány lényeges megjegyzéssel folytatom. Egyrészt, mivel a (4.44) levezetés alapján láttuk, hogy $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij}) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M}\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}b_{kj}$ igaz, ezért egy átosztás után az is teljesül, hogy

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})} = \sum_{j=1}^{N-M} w_{ij} = 1, i = 1,2,\ldots,M, \tag{B.3}$$

továbbá $w_{ij} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}/\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})$ $(i = 1,2,\ldots,M,\ j = 1,2,\ldots,N-M)$. Másrészt készítsük el a (B.1) egyenlet jobb oldalán álló háromtagú összegből azt az F_i-vel jelölt függvényt, amely tetszőleges $\mathbf{p}$ árvektorhoz a szóban forgó háromtagú összeg által meghatározott értéket rendeli. Ez esetben bármely $\mathbf{p} \geq 0$ árvektort illetően, az $F_i(\mathbf{p})$ értékek nemnegatívak lesznek.

A fentiek folyománya egy fixpontprobléma. Ezt a feladatot az alábbi, M-ismeretlenes egyenletrendszer adja meg:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= F_1(\mathbf{p}) \\ p_2 &= F_2(\mathbf{p}) \\ &\vdots \\ p_M &= F_M(\mathbf{p}) \end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

Ha ennek a fixpontproblémának van megoldása, akkor az nyilvánvalóan megoldása a (4.28) egyenletrendszernek is.[37]

Most nézzük a következő becslést, ahol $\hat{\mathbf{p}}$ egy $\mathbf{p}$-vel nem feltétlenül azonos nemnegatív

[37]Ez pedig nem egyebet jelent, mint hogy tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúlyt kapunk – természeten csakis a korábban már ismertetett másodrendű feltételek mellett. Mivel a (B.1) rendszer egyenértékű az elsőrendű feltételek (4.28) rendszerével, ezért a fixpontprobléma meg kell adja az általunk keresett összes Nash-egyensúlyt.

árvektor:

$$
\begin{aligned}
|F_i(\mathbf{p}) - F_i(\hat{\mathbf{p}})| &= \frac{1}{2}\left|\frac{\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} b_{ij}b_{kj}(p_k - \hat{p}_k)}{\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1-b_{ij})}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\max_k |p_k - \hat{p}_k| \sum_{j=1}^{N-M} w_{ij} = \frac{1}{2}\max_k |p_k - \hat{p}_k|
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

Mivel ezt az egyenlőtlenséget minden F_i teljesíti adott $\mathbf{p}$ és $\hat{\mathbf{p}}$ vektorok mellett, ezért

$$
\max_i |F_i(\mathbf{p}) - F_i(\hat{\mathbf{p}})| \leq \frac{1}{2}\max_k |p_k - \hat{p}_k| \tag{B.6}
$$

Ha pedig vesszük az $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_M)^\mathsf{T}$ egy vektorértékű függvényt, akkor a

$$
\|\mathbf{F}(\mathbf{p}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{p}})\|_\infty \leq q\,\|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}\|_\infty \tag{B.7}
$$

kontrakció fennáll a $q = 1/2$ kontrakciós konstanssal.

Mivel $\mathbf{F}$ a $\mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i$ halmazt önmagába képezi, ezért a Banach-féle fixponttétel miatt pontosan egyetlen nemnegatív árvektor adódik. ■

A Banach-féle fixpontétel egy további fontos következménye a jelenlegi esetben, hogy az absztrakt piacszerkezetet (modellezett részpiacot) egy tetszőleges $\mathbf{p}_0 \geq 0$ árvektor által meghatározott állapotból indítva a $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_n)$ iteráció ($n \geq 0$), vagyis a (B.1) áregyenlet szerint meghatározott iteráció „berántja” a piacot a fixpontba, ami esetünkben az egyensúlyi árvektor. Ez közgazdaságilag azért is lényeges, mert rámutat arra a tényre, hogy akárhogy is mozdítja ki az egyensúlyi árakat egy sokkhatás, azok idővel mindenképpen visszatérnek az egyensúlyi állapotba. Persze ez az árelmozdulás reálszintű változással is együtt jár, ha más tényezők nem módosulnak. Utóbbi kijelentés valós tartalma akkor érthető meg, ha szemügyre vesszük az egyedi termékkel szembeni keresletet, ezzel együtt pedig a termelői kínálatot. Azonban, ahogy fentebb bemutattam, az egyedi összkereslet és a termelői kibocsátások összege állandó.

B.2. Bizonyítás variációs egyenlőtlenség segítségével

A következő kiegészítő bizonyítás során a variációs egyenlőtlenség A. függelékben lévő definíciója mellett több-kevesebb mértékben támaszkodom Hartman és Stampacchia (1966), Gabay és Moulin (1980), Antman (1983), Mangasarian (1965) és Nagurney (1999) munkáira is. Ezek alapján igazolom a keresett Nash-egyensúly létezését és egyértelműségét.

Megjegyzem, hogy eddigi tapasztalatom szerint a variációs egyenlőtlenségek kisebb arányban jelennek meg egyensúlyi problémák vizsgálatakor, mint más eszközök.

Ugyanakkor a módszertan rendkívül alkalmas ilyen jellegű problémák elemzésére, ezért ezt a második kiegészítő bizonyítást az elsőhöz hasonlóan, a játékelméleti problémákban (is) betöltött szerepe miatt szintén fontosnak gondolom. Az előző kiegészítő bizonyításhoz hasonlóan ez a módszertan is lehetőséget ad az egyensúlyi árvektor meghatározásához szükséges algoritmus konstruálására.

Bizonyítás. A citált szerzők alapján egy $\mathbf{p}$ árvektor pontosan akkor tiszta stratégián alapuló Nash-egyensúly a (4.22) szerint vett értelemben, ha kielégíti a

$$\mathbf{H}(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{'}) \geq 0 \tag{B.8}$$

variációs egyenlőtlenséget a $\mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i$ halmazra nézve, ahol

$$\begin{gathered} \mathbf{H} : \mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i \to \mathbb{R}^M, \mathbf{p} \overset{\mathbf{H}}{\longmapsto} (H_1(\mathbf{p}), H_2(\mathbf{p}), \ldots, H_M(\mathbf{p})) \\ H_i = -\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}, i = 1, 2, \ldots, M, \end{gathered} \tag{B.9}$$

illetve $\mathbf{p}^{'} \in \mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i$ tetszőleges árvektor. A H_i függvény választása garantálja, hogy kizárólagosan (4.22) megoldásait adja (B.8), de azokat hiánytalanul.

Az A_i nemüres, zárt és konvex ($i = 1, 2, \ldots, M$), ezért $\mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i$ halmazra is ugyanez igaz. Korábban láttuk, hogy a $\pi_i(\mathbf{p})$ függvény p_i-ben konkáv minden i-re, amiből következik, hogy pszeudokonkáv is. Mindez biztosítja az iménti variációs egyenlőtlenség fennállását a $\mathsf{X}_{i=1}^{M} A_i$ halmazon.

Ha $\mathbf{H}$-ról kimutatható, hogy szigorúan monoton, akkor egyetlen egyensúlyi árvektor adódik. Tegyük fel ugyanis, hogy $\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{p}$ egy újabb egyensúlyi árvektor. Ez esetben mindkét

$$-\mathbf{H}(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \geq 0 \tag{B.10a}$$

$$-\mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \geq 0 \tag{B.10b}$$

egyenlőtlenség szimultán igaz. Ezen egyenlőtlenségeket egyszerűen összeadva azt kapjuk, hogy

$$(\mathbf{H}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{H}(\mathbf{p}))(\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}) \geq 0 \tag{B.11}$$

Azonban ez az egyenlőtlenség nem teljesülhet a szigorú monotonitás miatt, vagyis $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$.

Egyszerűen belátható, hogy a

$$x_{ij}(p_i^{''}) - x_{ij}(p_i^{'}) = -\epsilon b_{ij}\left(1 - b_{ij}\right)(p_i^{''} - p_i^{'}) < 0, \tag{B.12}$$

szigorú monotonitás teljesül, illetve hogy az

$$\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1 - b_{ij}\right)(p_i^{''} - p_i^{'}) > 0 \tag{B.13}$$

is igaz. Legyen $p_i^{''} > p_i^{'}$, ekkor előáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}(p_i^{'}) - \frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}(p_i^{''}) = 2\epsilon \sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}\left(1 - b_{ij}\right)(p_i^{''} - p_i^{'}) > 0 \tag{B.14}$$

Vagyis az előbbi megváltozás pozitív értékű. Ezzel viszont igazoltuk, hogy $\mathbf{H}$ szigorúan monoton, ami az egyensúlyi árvektor egyértelműségének elégséges feltétele. ■

B.3. Bizonyítás a Perron–Frobenius-tétel segítségével

Ebben az alfejezetben bemutatok egy elegáns gondolatmenetet $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz létezésére, valamint nemnegativitására. Ennek során a Perron–Frobenius-tételeket használom fel (lásd Woods 1978, Zalai 2012).

Megjegyzem, hogy a Perron–Frobenius-tételek többször előkerülnek közgazdasági elemzések során. Következésképpen ezek az eredmények feltétlenül hasznos segédeszközöknek bizonyulhatnak az elméleti vizsgálódásokban.

Bizonyítás. A fentebbi levezetésekből tudjuk, hogy a $\mathbf{Q}\mathbf{1}_M$ vektor összes koordinátája pozitív, valamint annak i-edik helyen álló eleme $\sum_{j=1}^{N-M} b_{ij}(1 - b_{ij})$. Ebből persze rögtön következik, hogy $||\mathbf{Q}||_\infty > 0$.

Átírom a $\mathbf{Q}$ mátrixot egyszerű átalakítással $||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - (||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})$ alakúra. Ebből már következik, hogy

$$||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{1}_M > (||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})\,\mathbf{1}_M \geq 0, \tag{B.15}$$

az egyenlőtlenség fennáll. Ezenkívül az első (szigorú) egyenlőtlenség jobb oldalon álló vektor megfelelő koordinátája biztosan szigorúan kisebb a bal oldalon álló vektor megfelelő koordinátájánál. A $||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}$ mátrix legnagyobb sajátértékét a $\rho(||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})$ szimbólummal jelölve, biztosan igaz lesz az

$$||\mathbf{Q}||_\infty \geq \rho(||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) \tag{B.16}$$

egyenlőtlenség. Mivel azonban garantáltan találunk olyan $K \in (0, 1)$ valós számot, hogy

$$K||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{1}_M > (||\mathbf{Q}||_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q})\,\mathbf{1}_M, \tag{B.17}$$

ezért megállapítható, hogy az

$$\|\mathbf{Q}\|_\infty > \rho(\|\mathbf{Q}\|_\infty \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) \tag{B.18}$$

egyenlőtlenség is teljesül. Mindebből az következik, hogy a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz létezik és elemei nemnegatívak. ■