Összetett indexek készítése új módon: a szűk keresztmetszetekért történő büntetés módszere

Műhelytanulmány

2011. március

Regional Innovation and Entrepreneurship Research Center

Szerzők

Rappai Gábor

Szerb László

Közgazdasági és Regionális Tudományok Intézete
Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar

MŰHELYTANULMÁNYOK

ÖSSZETETT INDEXEK KÉSZÍTÉSE ÚJ MÓDON: A SZŰK KERESZTMETSZETEKÉRT TÖRTÉNŐ BÜNTETÉS MÓDSZERE

Rappai Gábor – Szerb László

2011/1

2011. március

Összetett indexek készítése új módon: a szűk keresztmetszetekért történő büntetés módszere

Rappai Gábor
Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar
Pécs, Rákóczi 80, H-7622;
Tel: +36-72-501-599-3144;
E-mail: rappai@ktk.pte.hu
Web: http://www.gmi.ktk.pte.hu/index.php?p=contents&cid=26

Szerb László
Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar
Pécs, Rákóczi 80, H-7622, Hungary;
Tel: +36-72-501-599-3125;
E-mail: szerb@ktk.pte.hu
Web: http://www.gti.ktk.pte.hu/index.php?p=contents&cid=35

Köszönetnyilvánítás: A kutatást az OTKA finanszírozta K 81527 témaszámmal, a szerzők ezúton mondanak köszönet érte. Köszönet ugyanakkor a Közgazdasági- és Regionális Tudományok Intézete szemináriumán résztvevőknek a hozzászólásokért, Dr. Hermann Sándornak a recenzióért, Prof. Buday-Sántha Attilának és Dr. Barancsuk Jánosnak az írott változathoz fűzött megjegyzésiért.

Absztrakt: Az elmúlt évtizedben jelentősen nőtt a komplex mutatók, indexek népszerűsége, amelyek alkalmasak arra, hogy az összetett kategóriákat, fogalmakat egy számba sűrítve jelenítsék meg. Ez a tanulmány egy olyan új, az indexkészítés területén eddig nem alkalmazott módszert mutat be, amely képes az indexet alkotó változók közötti keresztkapcsolatok számszerűsítésére is. A szűk keresztmetszetekért történő büntetés (PFB) abból indul ki, hogy egy rendszer működését alapvetően a leggyengébb láncszem, a legalacsonyabb változóérték határozza meg. A magasabb értékű változók teljesítményét a szűk keresztmetszetek csökkentik, azaz az egyes változók között csupán korlátozott helyettesíthetőség áll fenn. A gazdaságpolitikai következtetés nyilvánvaló: a rendszer teljesítményét leginkább a szűk keresztmetszetek javítása, felszámolása révén lehet elérni. A módszer használatát a Globális Versenyképességi Index 2008-2009-es kiadványa alapján mutattuk be egy logaritmikus büntetőfüggvény alkalmazásának a segítségével.

JEL kód: C43 - Index Numbers and Aggregation, O10, Economic development

Bevezetés

Az elmúlt években egyre inkább divatba jöttek a komplex indexek. Mára már a 150-et is meghaladja a számuk. A régebben elérhető Gazdasági Szabadság Indexe (Heritage Foundation, Fraser Institute), a Humán Fejlődési Index (UNIDO), vagy a Korrupciós Index (Transparency International) mellett az elmúlt időkben a versenyképességi indexek a Világ Versenyképességi Index (IMD), vagy a Globális Versenyképességi Index (World Economic Forum) és a Doing Business Index (World Bank) vált népszerűvé. Az index készítés alapvető célja, hogy a vizsgálati egységek (országok, régiók vagy akár vállalatok) bizonyos szempontú, ámde komplexen értelmezhető teljesítményét egy számmal írja le. Az indexszám a teljesítmény különböző szempontjai alapján képzett összesített mutató, amely alkalmas lehet arra, hogy összehasonlítsuk az egyes vizsgálati egységek összteljesítményét vagy rangsort képezhessünk. Az indexet alkotó elemek (változók, pillérek) összesítésének technikája mára önálló kutatási iránnyá nőtte ki magát (Handbook on composite indicators 2008). Megjegyzésre érdemes, hogy a gazdasági növekedés és fejlődés legfontosabb mérőszámai a GDP vagy a GNI is ilyen komplex mutatónak tekinthető.

Ugyanakkor ezek az indexek sem mindenhatóak. Az adatgyűjtési és a specifikációs problémák mellett a közgazdászok, a politikusok egy része is gyanakodva tekint az egy számos szuper-indexekre, amelyek önmagukban nem igazán alkalmasak arra, hogy segítségükkel gazdaságpolitikai javaslatokat lehessen kidolgozni. A meglevő indexkészítési módszerek nem képesek a marginális hatások bemutatására sem. Ugyanakkor egyre több országban kezdik alkalmazni ezeket az indexeket a benchamarking politikai eszközeként. Egy időben például a magyar Nemzeti Fejlesztési és Gazdasági Minisztérium a Doing business indexet, illetve annak elemeit vette figyelembe a vállalkozások számára kedvező üzleti környezet kialakítása során.

Ebben a tanulmányban egy új index-készítési módszert ismertetünk, a Szűk Keresztmetszetekért Történő Büntetés (Penalty for Bottleneck (PFB)) néven. A PFB egy olyan dinamikus módszer, amely az indexet alkotó változók közötti kapcsolatot is figyelembe veszi. A PFB alapvető gondolata, hogy az egyes területek gyenge teljesítménye – a szűk keresztmetszet – a többi területre (változóra) és így az index egészére is negatív hatást gyakorol. A szűk keresztmetszet felszámolása révén a hatás megtöbbszöröződhet, hiszen ezáltal a többi elem teljesítménye is javul. A módszer alkalmas lehet egyedi gazdaságpolitikai javaslatok megtételére is. A módszer további előnye, hogy analitikai, így nem érzékeny a statisztikai módszerekre jellemző statisztikai hibára, ami elsősorban a minta elemszámának a függvénye. A PFB potenciális gyakorlati alkalmazása sokrétű, a teljesítmény mérésétől a vállalati stratégia, regionális és nemzetközi szintű indexekig terjedhet. A következőkben a Globális Versenyképességi Index (GCI) 2008-2009-as kiadását használjuk fel szemléltetésre.

A tanulmány első felében bemutatjuk a különböző összetett index-készítési metodológiákat és használatuk korlátait is. A második fejezet a PFB módszertanát mutatja be, a harmadik rész pedig a módszertan praktikus alkalmazását szemlélteti a versenyképesség példáján keresztül. Bemutatjuk a lehetséges gazdaságpolitikai alkalmazást és a marginális elemzést is. Az utolsó fejezetben kerül sor a következtetések levonására.

Index készítés: módszertanok és problémák

A legtöbb index azért készül, hogy a komplex jellemzőkkel, változókkal leírható egységeket egy számmal (index-szel) jellemezzen. Mivel az egyik egység az egyik változó, a másik pedig esetleg a másik változó szerint jobb, az indexet alkotó változók összegzésére, információtartalmuk redukálására van szükség, hogy a segítségükkel egyértelmű sorrendet határozhassunk meg. Technikailag a következő transzformációt akarjuk elvégezni:

$$P_i\ (x_{i1}, x_{i2},.,, x_{ij},..\ x_{km}) \rightarrow\ R_i, \text{ ahol } i = 1,2,...k, \text{ és } j = 1,2...m, \qquad (1)$$

P: mátrix amely k x m elemből épül fel
m: az egységek száma (ország, régió, vállalat etc.)
k: a jellemvonások/változók száma
$x_{ij:}$ a j egység i változó szerinti észlelt értéke
R_i : az egyedi index számokat tartalmazó vektor, 1,2,...m

Az indexek egy közös jellemzője, hogy számos változót, indikátort vagy pillért tartalmaznak. Gyakori az is, hogy egy középszintű al-indexet kalkulálnak, és a végső index érték az al-indexek összegzése, kombinálása révén jön létre. Az indexek készítése számos kihívással jár. Az Európai Unió és az OECD által kiadott kézikönyv tíz pontban sorolja fel a kompozit indikátorok készítésének lépéseit az elméleti háttér kifejlesztésétől az eredmények értelmezéséig (Handbook on composite indicators 2008). A következőkben az általunk legfontosabbnak tartott öt specifikus problémát emeljük ki, a többiekkel csupán röviden foglalkozunk:

1. *A változók kiválasztásának problematikája* Ha megvan a megfelelő elméleti háttér, akkor kerül sor a megfelelő változók kiválasztására. Például a Globális Versenyképességi Index elméleti alapját Porter gyémánt modellje szolgáltatja. A megfelelő adatok hiánya azonban gyakran akadályozza, hogy a legjobbnak tartott változókat alkalmazni tudjuk. Ez különösen problematikus, amikor az

indexet nagyszámú ország esetében szeretnénk kiszámítani, amihez az adatgyűjtés drága vagy éppen lehetetlen. Az egyes hiányzó adatok pótlására természetesen több statisztikai módszer is rendelkezésünkre áll, ezek azonban csak másodlagos megoldások lehetnek.

További gond adódhat, amikor a változók negatív korrelációt mutatnak, azaz az egyik változó javulása csak a másik változó gyengítése árán érhető el. Ez a különösen nagyszámú változót tartalmazó indexek esetében fordul elő. Ilyen például az IMD Világ Versenyképességi Indexe a maga 327 változójával (IMD World Competitiveness Yearbook 2010). A negatív korreláció problematikáját az al-indexek képzésével lehet, legalábbis részben, korrigálni.

2. *A változók mértékegységeinek problematikája* A változók különbféle mértékegységekben, skálában állhatnak rendelkezésre, ezeket közös nevezőre kell hozni, azaz normalizálni szükséges. A Handbook of composite indicators (2008) kiadvány kilenc különböző normalizációs technikát említ a sorrendtől a standardizáción keresztül a min –max normalizációig. Tökéletes megoldás nincsen, mindegyik módszernek vannak előnyei és hátrányai egyaránt. A sorrend esetében a kilógó értékek (outlier) nem jelentenek gondot, viszont a különbségek az egyes egységek között állandóak. A nem sorrenden alapuló normalizációs technikáknak viszont valamilyen úton módon kezelni kell a kiugró értékeket.

3. *A változók és az al-indexek súlyozása* sem mentes a problémáktól. Valamilyen szinten minden súlyozás szubjektív, még az is, amelyik nem alkalmaz súlyozást. A magas korrelációjú változók esetében jól alkalmazhatók a statisztikai módszerek. A legnépszerűbb a principal-component módszer, amely esetében az Eugen-értékeket használhatjuk súlyokként. A minta alacsony esetszáma viszont csökkentheti a megbízhatóságot. A GCI egy másik jó példa az elméletileg megalapozott regressziós technikával kalkulált súlyok alkalmazására (Porter and Schwab 2008).

4. *A változók aggregálását* is többféleképpen végezhetjük el. A legegyszerűbb módszer a normalizált változók vagy al-indexek(súlyozott) átlagának a kalkulálása. A legtöbb komplex index ezt a módszert alkalmazza.

A principal-component és a faktor-elemzés nem csupán a súlyok meghatározására alkalmas, hanem aggregálásra is. Például a faktor-elemzés egy olyan adatredukálási technika, ahol az egymással szorosan korreláló változók egy csoportba kerülnek. Ekkor azonban a súlyozás más módon már nem kontrollálható, és a további gondot jelenthetnek a negatívan korreláló változók.

A Grey reláció elemzés egy olyan analitikai alapokon nyugvó módszer, amely egy másfajta megoldást nyújt. A Grey módszertan dinamikusan összehasonlít minden egyes elemet a rendszerben. Az egyes tényezők közti kapcsolat (reláció) megjelenítéséhez felhasználja az egyes tényezők közötti hasonlóságokat és különbségeket is (Deng 1989). A számolás eredménye a reláció érték felhasználható a sorrend megállapításához is. Talán meglepetés, de a fenti indexek egyike sem alkalmazza a reláció-elemzést, azonban más típusú felhasználásai a mérnöki tudományoktól a vállalati alkalmazásokig ismertek.[1]

A kilógó adatok, outlier-ek itt is problémásak lehetnek. Az extrém értékek torzított eredményt és következésképpen fals sorrendet adhatnak. A csonkolás vagy az értékek maximalizálása olyan praktikus megoldások, amelyek elfogadható információveszteséggel járnak.

5. Az index-készítés egy másik gyakori problémája, hogy mit is kezdjünk az egyes változók közötti különbségekkel. A Doing business index 2009-es jelentése szerint például Magyarország a 41., azonban az egyes al-indexek esetében a sorrend a 12. (a szerződések betartása) a 113. (a befektetők védelme) között található. Az egyes al-indexek szimpla átlagolása elfedi azt a lehetséges negatív hatást, amit a rosszabb változók okozhatnak a többi változó, és így áttételesen az egész index esetében. Végső soron ezen indexek azzal a feltételezéssel készülnek, hogy az egyes változók között teljes a helyettesíthetőség, azaz az egyik változó rossz teljesítménye teljes mértékben kompenzálható egy másik, jobb változó-teljesítménnyel.

A bizonytalansággal, kockázatokkal történő kalkulálás a legáltalánosabb talán a pénzügyi befektetések területén, ahol a kamatlábak vagy a hozamok szórása a döntési alternatívákat alapvetően befolyásolja.[2] Ugyanakkor az index készítés esetében nem alkalmaznak ilyen jellegű megoldásokat.

A szűk keresztmetszetért történő büntetés módszere

Az előző fejezet egyik fő megállapítása, hogy az index készítés egyik fontos problémája, hogy a változók közötti kereszthatás nem jelenik meg. Így azok a gazdaságpolitikai javaslatok, amelyek a változók teljes mértékű helyettesíthetőségére épülnek, félrevezetőek lehetnek. A következőkben egy

[1] A Grey reláció pontok még arra is alkalmasak, hogy olyan sporteseményeket értékeljünk ki a segítségükkel, mint például a tízpróba, ahol a különböző sportágak eredményeit kell egymással összehasonlítani. (Ching-Liang et al 2003).

[2] A Capital Asset Pricing Method (CAPM) a β koefficienst alkalmazza, hogy a szóban forgó értékpapír kockázatát megbecsülje. A β egy érzékenységi mértékegység, amely az adott értékpapír hozamának kockázatosságát veti össze a piaci hozamnak megfelelő kockázattal. Egy értékpapír elvárt hozama növekszik, ha a β növekszik, azaz büntet a hozam magas varianciája miatt (Lintner 1965, Markowitz 1999, Sharpe 1964)

olyan új módszertant mutatunk be, amely figyelembe veszi a változók közötti különbségeket és ennek kezelésére egy elfogadható analitikai alapokon nyugvó megoldást kínál. A Szűk Keresztmetszetekért Történő Büntetés (PFB) analitikai megoldása előnyös a kisebb mintaszámok esetében is, hiszen nem szenzitív a statisztikai hibára, mint például a szórás.

A PFB általános módszertana

Először is hívjuk vissza az 1. számú egyenletet, ahol van egy P mátrixunk *m* számú egységgel és *k* számú változóval. Mi egy olyan transzformációt szeretnénk, amely a *k* változót egy számra redukálja. Ehhez először is a változókat normalizálni szükséges. Tekintve, hogy a PFB módszertan esetében igen fontos, hogy a változók ugyanazon tartományon belül helyezkedjenek el, a (0,1) tartományba rendezzük az értékeket, ahol az 1 az adott változó maximális a nulla pedig a minimális értéke lesz.

$$\frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \tag{2}$$

A (0,1) normalizálást az összes *k* számú változóra elvégezzük. Ezek után az adott egység változó értékeit nagyság szerinti sorrendbe rendezzük a 3. egyenletnek megfelelően:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq 1 \tag{3}$$

A következőkben definiáljuk a szűk keresztmetszetet a terjedelem mutatóval, amely az *i*-dik változó és a legkisebb értékű változó különbsége lesz. A szűk keresztmetszet vektor (R_i) a következőképpen definiálható:

$R_i = x_i - x_1$, ahol i= 1, 2, 3,….k (4)

Alkalmazzuk most a büntető függvényt általános formában:

$$x_i' = x_1 + f(x_i - x_1) \tag{5}$$

ahol $f(.)$ a büntető függvény

A büntető függvény alapvető implikációja, hogy a szűk keresztmetszetek, azaz a változók közötti különbségek, a magasabb értékű változót negatívan befolyásolják.

A büntető függvénynek a következő két feltételt kell teljesítenie:

(1) ha $f(0)=0$, akkor $x_1' = x_1$, és

(2) meredeksége a $[0;1]$ zárt intervallumon nem nagyobb mint 1

Az adott egység index-értéke, ami az összteljesítményt mutatja a *k* változó alapján, a PFB módszerrel igazított változó értékek egyszerű számtani átlagaként kapható meg:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i' = x_1 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x_i - x_1) \qquad (6)$$

Az index értékét ezek szerint alapvetően meghatározza a legrosszabb változó értéke, ami a leggyengébb láncszemnek tekinthető. A büntetés nagysága az adott változó és a legrosszabb változó közötti különbség függvényében változik: nagyobb különbség magasabb büntetést jelent.

A korábbi logikából következően a büntetőfüggvény jól működik, ha megfelel a korábbi feltételeknek és a módosított értékek összege (átlaga) nem nagyobb, mint az eredeti értékeké, vagyis:

$$\begin{aligned} kx_1 + \sum_{i=1}^{k} f(x_i - x_1) &\le \sum_{i=1}^{k} x_i \\ x_1 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x_i - x_1) &< \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \end{aligned} \qquad (7)$$

A logaritmikus büntető-függvény

Definiáljunk a következőkben egy konkrét büntetőfüggvényt:

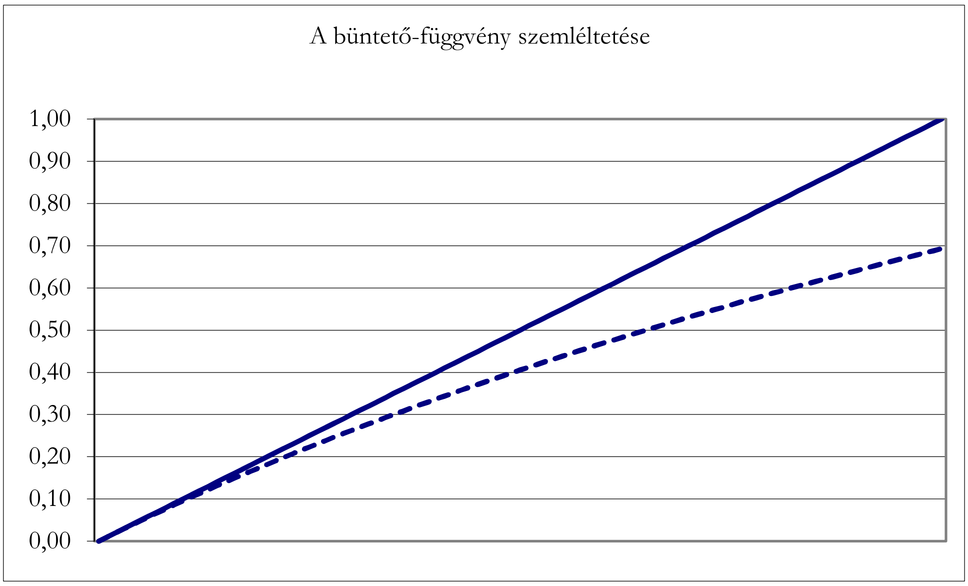
$$f(z) = \ln(1+z) \qquad (8)$$

Ezek szerint a büntetés utáni változó értéke a következőképpen alakul:

$$x_i' = x_1 + \ln(1 + x_i - x_1) \quad i = 1,\ldots k. \qquad (9)$$

Illusztráljuk az alábbi ábrán az eredeti, illetve a módosított értékek alakulását (a folytonos vonal az eredeti, a szaggatott a „büntetett” értékeket mutatja):

1. Ábra: A logaritmikus büntető függvény: eredeti (folyamatos) és büntetés utáni (szaggatott) értékek, amikor x_1= 0



Feltételezzük például, hogy egy változó normalizált értéke 0.60, és a legalacsonyabb változó érték 0.40. A különbség, a távolság 0.20. vegyük az 1+0.2 természetes alapú logaritmusát, ami 0.18. Ezek szerint a végső büntetés utáni igazított érték 0.40 + 0.18 = 0.58 a 0.60 helyett. A lehetséges legnagyobb távolság a két változó között 1, amikor az egyik esetében a maximum a legrosszabb pedig 1 értékkel rendelkezik. Az 1+1=2 természetes alapú logaritmusa 0.693, ezek szerint a maximális büntetés mértéke 1-0.693 = 0.307.

Könnyű belátni, hogy az 1. számú elvárás teljesül, hiszen $\ln(1+0)=0$. Vizsgáljuk meg a függvény meredekségét.

$$\frac{\partial \ln(1+z)}{\partial z}=\frac{1}{1+z} \tag{10}$$

ami a $[0;1]$ zárt intervallumon mindvégig 1-nél nem nagyobb pozitív érték.

Elemezzük a módosított értékek vizsgálatunk szempontjából legfontosabb jellemzőit, az értékösszeget és a terjedelmet. A korrigált értékek összege:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i' = kx_1 + \sum_{i=1}^{k} \ln(1+x_i-x_1) \tag{11}$$

amelyről könnyen belátható, hogy a „büntetés” következtében alacsonyabb, mint az eredeti értékösszeg, hiszen amennyiben $0 \le x_1 \le x_i \le 1$, vagyis $0 \le x_i - x_1 \le 1$, akkor valamennyi i-re igaz, hogy

$$\ln(1+x_i-x_1)\le(x_i-x_1) \tag{12}$$

következésképpen,

$$\begin{gathered} kx_1+\sum_{i=1}^{k}\ln(1+x_i-x_1)\le kx_1+\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_1) \\ \sum_{i=1}^{k}x_i'\le\sum_{i=1}^{k}x_i \end{gathered} \tag{13}$$

A büntetett értékek terjedelme

$$R'=x_k'-x_1'=(x_1+\ln(1+x_k-x_1))-(x_1+\ln(1+x_1-x_1))=\ln(1+x_k-x_1) \tag{14}$$

amelyről – az előbbi logika alapján belátható, hogy kisebb, mint az eredeti terjedelem.[3]

A pótlólagos erőforrások elosztása

Tételezzük fel, hogy a korábbi rendszerben lehetőség nyílik új forrás bevonására, vagy a források átcsoportosítására. Könnyen belátható, hogy amennyiben az eredeti mértékekkel számolunk, akkor az aggregált teljesítmény szempontjából indifferens, hogy melyik változó értékét növeljük, illetve csökkentjük. Vizsgáljuk meg, hogy a büntetőfüggvény alkalmazásával van-e mód az optimális forrásallokáció elvégzésére!

Feltevésünk szerint ebben az esetben a rendszert leíró mértékek összesen Δ értékkel növelhetők. Beláthatóan a módosított értékek büntetőfüggvény nélküli összege[4] ekkor

$$\sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_i' \tag{15}$$

függetlenül attól, hogy melyik összetevő(ke)t növeljük. (Nyilvánvalóan létezik egy korlát az összetevők közötti felosztásra itt is, ez pedig a $\tilde{x}_k\le 1$; de ezzel itt nem foglalkozunk.)

[3] Vegyük észre, hogy a maximális érték is mindössze egy érték a *k* különböző változó értékei közül, tehát rá is igaz minden korábbi egyedi megfontolás.

[4] A továbbiakban a pótlólagos forrás szétosztását követően létrejött mértékeket módosított értéknek nevezzük (és $\tilde{x}_i$ szimbólummal jelöljük), ha ezek számbavétele során alkalmazunk büntetőfüggvényt, akkor büntetett módosított értékről beszélünk. (és $\tilde{x}_i'$ szimbólummal jelöljük)

Ezzel ellentétben, a büntetett módosított értékek összege különbözik annak függvényében, hogy a pótlólagos forrást hogyan osztjuk el. Legyen az i-edik mértékre jutó pótlólagos forrás nagysága Δ_i, ahol

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta_i = \Delta \tag{16}$$

Ekkor a büntetett módosított értékek összege

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i' = k\left(x_1 + \Delta_1\right) + \sum_{i=1}^{k} \ln\left(1 + x_i - x_1 + \Delta_i - \Delta_1\right) \tag{17}$$

melynek keressük a maximumát. A megoldandó szélsőérték-keresési feladat tehát az alábbi:

$$\frac{\partial\left[\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i'\right]}{\partial\left(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\right)} \Bigg| \left(\sum_{i=1}^{k} \Delta_i = \Delta\right) = 0 \tag{18}$$

Tételezzük fel, hogy $k = 2$, ekkor a feladat egyszerűsödik a

$$\frac{\partial\left[2\left(x_1 + \Delta_1\right) + \ln\left(1 + x_2 + \left(\Delta - \Delta_1\right) - \left(x_1 + \Delta_1\right)\right)\right]}{\partial \Delta_1} = 2 - \frac{2}{1 + x_2 - x_1 + \Delta - 2\Delta_1} = 0 \tag{19}$$

problémára, amely egyszerűen megoldható:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \tag{20}$$

$$\Delta_2 = \frac{\Delta}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2} \tag{21}$$

Mivel jelenlegi feltevéseink szerint a pótlólagos forrást szét kell osztani, azaz átcsoportosításra nincs mód, vagyis nem lehetséges, hogy a fenti „módosító tételek" negatívak legyenek. Így szükség van a $0 \le \Delta_2$ korlát bevezetésére, ebből következően ha $\Delta \le x_2 - x_1$, akkor $\Delta_1 = \Delta$.

Mindezek alapján kétváltozós esetre az alábbi egyszerű táblázat készíthető (1. számú tábla)

1. számú tábla: A pótlólagos források szétosztása két változó esetében

	Δ	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\sum \tilde{x}$	$\max\left(\sum \tilde{x}'\right)$
1. eset	$\Delta \le x_2 - x_1$	$x_1 + \Delta$	x_2	$x_1 + x_2 + \Delta$	$2\left(x_1 + \Delta\right) + \ln\left(1 + x_2 - x_1 - \Delta\right)$
2. eset	$x_2 - x_1 < \Delta$	$x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{\Delta}{2}$	$x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{\Delta}{2}$	$x_1 + x_2 + \Delta$	$x_1 + x_2 + \Delta$

Vegyük észre, hogy az utóbbi esetben a mértékek a pótlólagos forrás bevonása után egyenlők, vagyis amennyiben lehetőség nyílik rá, a pótlólagos forrást a lemaradás kiegyenlítésére kell fordítani.

A fentiek analógiájára – indukcióval – bizonyítható, hogy a pótlólagosan rendelkezésre álló forrás felosztása során az „alulról feltöltés” elvét kell alkalmazni, azaz

Δ	$\tilde{x}_i$
$\Delta \le (i-1)x_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j$	x_i
$(i-1)x_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j < \Delta$	$x_i + \dfrac{\Delta - (i-1)x_i + \sum_{j=1}^{i-1} x_j}{i}$

Nyilvánvalóan a *k* mértéket tartalmazó esetben, a korábbiak figyelembevételével számos további korlát is megjelenik, ezek beépítése azonban relatíve egyszerűen megoldható.

A PFB alkalmazása a Globális Versenyképességi Index (GCI) esetében

Vegyük a GCI 2008-2009-as adatait, hogy a PFB metódust szemléltetni tudjuk. A GCI-t három al-index súlyozott átlagaként kapjuk meg. Ezek az Alapvető követelmények, a Hatékonyságfokozók, és Innováció és vállalatvezetés kifinomultsága. A három alindex összesen tizenkettő változó, ebben az esetben pillér átlagaként kapható meg. Négy pillér alkotja az Alapvető követelményeket (intézmények, infrastruktúra, makroökonómiai stabilitás, egészség és alapvető oktatás), hat a hatékonyság fokozókat (felsőfokú képzés és oktatás, fogyasztói piacok hatékonysága, munkaerőpiac hatékonysága, pénzügyi piacok kifinomultsága, technológiai készenlét és a piac mérete) és kettő az Innováció és vállalatvezetés kifinomultságát (innováció, vállalatvezetés kifinomultsága). Szűk keresztmetszetek a versenyképesség több területén is értelmezhetők. A GCI esetében a szűk keresztmetszetet a továbbiakban az al-index szinten értelmezzük. A PFB igazított értékek kalkulálását a következőképpen végezzük el:

1. **Normalizáció**: először is a 2. számú egyenletnek megfelelően a tizenkét pillért a (0,1) intervallumba normalizáljuk, ahol 1-es a legjobb, 0 a leggyengébb érték.

2. **A PFB igazított értékek kalkulálása minden ország esetében:** A büntetést mind a három al-index esetében elvégezzük. Minden egyes ország PFB értékeit

megkaphatjuk a normalizált pillér értékekből a 9. egyenlet alkalmazásával. A példában szereplő logaritmikus büntetőfüggvényt alkalmaztuk, amely egy enyhe büntetést jelent.

3. **A PFB igazított al-indexek kalkulálása:** A PFB igazított a-indexek az adott al-indexet tartalmazó pillérek átlagolása révén kaphatók meg.

4. **A PFB igazított GCI pontok kalkulálása:** A GCI pontokat kétféleképpen kalkuláltuk, mégpedig az eredeti GCI módszernek megfelelően súlyozva (Porter és Schwab 2009) és súlyozás nélkül is.

A következőkben az eredeti és a PFB igazított GCI pontokat és helyezéseket hasonlítjuk össze. Bár a GCI jelentésben szereplő mind a 174 országra kiszámítottuk az igazított értékeket, itt csak 22 országot választottunk ki: az első tízet és a volt szocialista közép-kelet európai nemzeteket. Hogy az eredmények közvetlenül is összehasonlíthatók legyenek, a GCI értékeket és a PFB igazított értékeket is egy 10 pontos skálára kalibráltuk át.

2. számú tábla:Az eredeti és a PFB igazított GCI értékek és sorrendek a kiválasztott országok esetében

Ország	GCI 2008-2009 pont (10-es skála)	GCI 2008-2009 sorrend	GCI PFB súlyozott átlag	GCI PFB súlyozott sorrend	GCI PFB átlag	GCI PFB átlag sorrend
Svájc	8,01	2	6,95	2	7,21	1
Dánia	7,98	3	6,88	3	7,09	2
USA	8,21	1	7,10	1	7,05	3
Szingapúr	7,91	5	6,79	4	6,95	4
Finnország	7,85	6	6,59	6	6,95	5
Svédország	7,91	4	6,63	5	6,91	6
Németország	7,81	7	6,36	8	6,70	7
Hollandia	7,73	8	6,35	9	6,55	8
Kanada	7,68	10	6,37	7	6,49	9
Japán	7,68	9	6,33	10	6,46	10
Észtország	6,67	32	5,05	28	4,91	29
Csehország	6,60	33	4,72	34	4,76	32
Szlovénia	6,42	42	4,46	43	4,66	34
Litvánia	6,35	44	4,33	46	4,22	44
Szlovákia	6,29	46	4,35	45	4,14	46
Magyarország	6,03	62	3,91	56	3,78	53
Horvátország	6,03	61	3,81	58	3,74	56
Lettország	6,08	54	3,98	53	3,72	57
Lengyelország	6,12	53	3,84	57	3,67	60
Oroszország	6,16	51	3,59	68	3,44	63
Románia	5,86	68	3,56	71	3,25	71
Bulgária	5,76	76	3,47	79	3,05	81

A 2. számú táblában látható, hogy ugyanaz az első tíz ország szerepel az első helyeken, bármelyik módszert is alkalmazzuk. Ezen belül azonban az országok sorrendje változik. Ha a PFB igazított értékek egyszerű átlagaként kalkuláljuk a GCI-t, akkor az USA helyett Svájc kerül az első helyre. A rangsorrend változása azonban összességében minimális, ami azt mutatja, hogy ezek az országok relatíve kiegyensúlyozottak a 12 pillér tekintetében, vagy pedig nagyjából mindenkinek van gyenge pontja.

Sokkal nagyobb változások láthatóak, ha a lista alsóbb részét vizsgáljuk. Észtország négy helyet veszít, Oroszország tizenkettőt (!), Románia hármat, Horvátország és Bulgária öt helyet. Ezzel egy időben Magyarország kilenc, Szlovénia nyolc helyet javít. Szlovákia ugyanott marad. Összességében az a következtetést vonhatjuk le, hogy az egyes pillérek közötti különbségek sokkal nagyobbak lehetnek az alacsonyabb versenyképességű országokban.

Gazdaságpolitikai javaslatok: a pillérek marginális változásának hatása

A következőkben a PFB módszer egy újabb alkalmazását mutatjuk be. Ahogyan azt már a korábbiakban említettük, a GCI javulása attól is függ, hogy melyik pillért javítjuk. A PFB módszer szerint a leggyengébb pillér értékét kell növelni, hiszen ez kihat a többi pillér-érték növelésére is. A gazdaságpolitikai implikáció világos: javítsunk a leggyengébb pillér-értéken, hiszen a pozitív hatás megtöbbszöröződhet. A javulás mértéke azonban a következő feltételektől függ:

1. A javulás nem csupán a leggyengébb pillér nagyságától függ, hanem attól is, hogy mekkora a különbség a leggyengébb és a második leggyengébb pillér, illetve a második és a harmadik leggyengébb pillér között. A legnagyobb mértékű javulás akkor érhető el, ha az adott országnak egy gyenge pillérje van, és az igazítás után nem alakul ki másik gyenge pillér.

2. Egy másik fontos kérdés, hogy a plusz erőforrás elosztása esetében ragaszkodunk, hogy azt csupán egy pillér javításához vehetjük igénybe, vagy megengedjük az erőforrás elosztását több pillér között. Ha az erőforrás szétosztása megengedett, a hatás nagyobb lehet az 1. pontban leírtak függvényében.

3. Egy teljesen különböző konstelláció, ha a teljes rendszer optimalizációját megengedjük, azaz a jobb pillér-értékek csökkentését is megengedjük a rosszabb pillér-értékeke növelésének a rovására. Az optimális megoldás a szűk keresztmetszetek nélküli index, azaz az összes pillér ugyanazt az értéket veszi fel.

Ebben a fejezetrészben csak egy egyszerű esetet vizsgálunk, amikor 0,1 addicionális erőforrással rendelkezünk, amit egy pillér javításához használhatunk fel. Három ország esetében mutatjuk be a különböző szkenáriókat, a vezető Svájc, Belgium, amelyik egy gyenge pillérrel, és Magyarország, amelyik több gyenge pillérrel rendelkezik. A 3. számú tábla mutatja az eredeti és az igazítás utáni pillér-értékeket. A táblázat utolsó sorában láthatóak a GCI átlagpontok, ahogyan az eredeti jelentésben vannak, és a PFB igazítás utáni értékek.

3. számú tábla: A leggyengébb pillér 0,1-es javításának hatása

Ország/Kategóriák	Svájc		Belgium		Magyarország	
	Eredeti	Igazított	Eredeti	Igazított	Eredeti	Igazított
Alapvető követelmények	**0,819**	**0,819**	0,719	0,719	**0,479**	**0,479**
Intézmények	0,776	0,776	0,597	0,597	0,333	0,333
Infrastruktúra	0,888	0,888	0,742	0,742	0,411	0,411
Makroökonómiai stabilitás	0,813	0,813	0,663	0,663	0,493	0,493
Egészség és alapvető oktatás	0,801	0,801	0,872	0,872	0,678	0,678
Hatékonyság fokozók	**0,643**	**0,660**	**0,559**	**0,575**	**0,376**	**0,422**
Felsőfokú képzés	0,717	0,717	0,723	0,723	0,496	0,496
Fogyasztói piacok hatékonysága	0,594	0,594	0,565	0,565	0,315	0,315
Munkaerőpiac hatékonysága	0,642	0,642	0,267	0,367	0,259	0,359
Pénzügyi piacok kifinomultsága	0,590	0,590	0,587	0,587	0,392	0,392
Technológiai készenlét	0,749	0,749	0,597	0,597	0,435	0,435
Piac mérete	0,569	0,669	0,613	0,613	0,533	0,533
Innováció és kifinomultság	**0,706**	**0,706**	**0,565**	**0,565**	**0,279**	**0,279**
Vállalatvezetés kifinomultsága	0,708	0,708	0,598	0,598	0,277	0,277
Innováció	0,704	0,704	0,532	0,532	0,281	0,281
GCI átlag	**0,723**	**0,729**	**0,614**	**0,620**	**0,388**	**0,393**
GCI PFB igazított átlag	**0,721**	**0,727**	**0,596**	**0,608**	**0,378**	**0,385**

Aláhúzott szám: a leggyengébb pillér-érték

Svájc teljesítménye kiegyensúlyozott, a pillér értékek 0,569-tól (Piac mérete) 0,883-ig (Infrastruktúra) terjednek. 0,1-el javítva a leggyengébb pillér-értéket mind a GCI átlag, mind a PFB igazított GCI átlag emelkedik. A javulás nagyságrendje hasonló, egy kicsivel magasabb, a PFB igazított esetnél. A kismértékű javulás oka, hogy a piac méretének javulása után egy másik szűk keresztmetszet, a pénzügyi piacok szofisztikáltsága alakul ki 0,590 pillér-értékkel.

Belgium egy kivételes ország, hiszen alapvetően egy gyenge pillérje van, a Munkaerő-piaci hatékonyság 0,267 ponttal. A Munkaerő-piaci hatékonyság még a 0,1 javulás után is a leggyengébb pillér marad annak ellenére, hogy a GCI javul. A PFB igazítás után a GCI átlagpontszám 0,012-vel javul, ami pontosan a duplája annak, amit a PFB számítás nélkül kaphatunk.

Magyarország teljesítménye relatíve kiegyensúlyozatlan. Az egyes pillér értékek 0,259-től (Munkaerő-piaci hatékonyság) 0,678-ig (Egészség és alapfokú oktatás) terjednek. A Munkaerő-piaci hatékonyságot 0,1-el javítva a Vállalatvezetés kifinomultsága lesz az új szűk keresztmetszet 0,277-es pillér értékkel. A PFB igazított GCI 0,007-el javul, a PFB igazítás nélküli javulás mértéke pedig 0,005.

Mint az látható, az addicionális erőforrás hatása a PFB igazított értékek esetében mindig nagyobb, mint a PFB igazítás nélkül. Úgy véljük, hogy a PFB implikálta gazdaságpolitikai javaslatok - a leggyengébb láncszem javítása – sokkal helyénvalóbb, mint az egyszerű átlagszámítás következtetése, amely szerint teljesen mindegy, melyik pillért javítjuk, annak hatása ugyanaz lesz. A PFB módszer alapján képzett, egyénre szabott gazdaságpolitikai javaslatok valós képet adnak arról, hogyan is növelhető egy ország versenyképessége.

A különböző büntető-függvények alkalmazása esetében, amely nagyobb büntetési tételekkel és kisebb helyettesítési hatással számol, a javulás értéke is számottevőbb lehet.[5] A megfelelő büntető függvény alkalmazása természetesen attól is függ, hogy mit szeretnénk magyarázni. További kutatást és elméleti fejlesztést igényel azonban az, hogy az egyes változók közötti helyettesíthetőség mértékét és így a megfelelő büntetőfüggvényt megtalálhassuk.

Összefoglalás, következtetések

Ezen tanulmány alapvető célja volt, hogy egy olyan dinamikus index-készítési módszert mutasson be, amely alkalmas arra, hogy segítségével egyedi gazdaságpolitikai javaslatokat lehessen tenni a leggyengébb láncszem javítása révén. A módszer alkalmazása következtében az egyes egységek rang-sorrendje megváltozhat. A változás mértéke attól függ, hogy a vizsgált egység szűk keresztmetszete hogyan viszonyul a többi egység esetében tapasztalható szűk keresztmetszethez. Ha minden egyes egység hasonló nagyságú szűk keresztmetszettel rendelkezik, akkor a sorrend nem változik túl sokat. Ha viszont az egyik egység nagyon kiegyensúlyozatlan a többiekhez képest, akkor akár jelentően is visszaeshet. A visszaesés nagysága ugyanakkor függ a büntetési tétel nagyságától is. A gazdaságpolitikai javaslat világos: a leggyengébb láncszemet kell először javítani, hiszen ennek negatív hatása kiterjed a többi egységre is.

[5] Másik két esetet is vizsgáltunk mint a különbségek átlaga (x_{min}+ ((x_i-x_{min})/2) és egy négyzetgyökös igazítás (x_{min}-1 + sqrt(1 + (x_i - x_{min})). A büntetési tétel mindkét estben légyegesen nagyobb, mint a logaritmikus igazítás esetében.

Mint bármelyik módszertan esetében tapasztalható, a PFB-nek is vannak hátrányos vonásai. Először is a büntetőfüggvény alkalmazása ad hoc, a bemutatott logaritmikus büntetésnek nincsen elméleti alapja. Megjegyezzük azonban, hogy hasonló axiomatikus alapfelvetés látható a pénzügyes közgazdászok által alkalmazott szórás esetében. Másodszor, a módszer feltételezi, hogy az egyes változók eloszlása hasonló, preferáltan normál eloszlású a vizsgált egységek mentén. Ilyen módon az esetleges outlier-ek rossz index értéket és következésképpen helytelen rangsorrendet eredményeznek. A levonható gazdaságpolitikai következtetések pedig szintén helytelenek lehetnek. Csonkolás vagy az értékek maximalizálása erősen javasolt ilyen esetekben. Harmadszor, feltételezett az, hogy az egyes változók pozitívan korrelálnak egymással. Az esetleges negatív korreláció azt mutathatja, hogy az egyik változó értékét növelni csak a másik változó rontása árán lehet. Ez más módszerekkel készített indexek esetében is gond, itt azonban különösen problematikus.

Úgy véljük, hogy az általunk ismertetett módszer jól használható más esetekben is mind makrogazdasági mind mikro-mutatókhoz, indexekhez. Ilyen alkalmazást láthatunk a vállalkozás esetében, ahol a Globális Vállalkozói és Fejlődési Index (GEDI) hasonló módon képzett (Acs és Szerb 2010). Szerb (2010) pedig egy vállalati szintű versenyképességi mutatóhoz alkalmazta a PFB módszertanát. A KRTI szemináriumán többen is felhívták a figyelmet olyan potenciális alkalmazási területekre, mint például a társadalmi jóléti vagy a termelési függvények, ahol a az egyes tényezők és faktorok korlátozott helyettesíthetősége fontos szerepet játszik. Ezen kutatási területek feltárása további kutatásokat igényelnek – nem feltétlenül és csak ezen tanulmány szerzőitől.

Irodalomjegyzék

Acs, Z.J. - L. Szerb 2010 The Global Entrepreneurship And Development Index 2011, Edward Elgar, 349 old.

Ching-Liang, C. – T. Chih-Hung – C. Lieh 2003 Applying Grey relational analysis to the decathlon evaluation model, International Journal of The Computer, The Internet and Management, Vol 11. no 3 pp.54-62

Deng, J.L. 1989 The introduction to Grey System Theory, The Journal of Grey System, Vol 1 no 1. pp. 1-24

[Doing Business 2009] 2008 The International Bank for Reconstruction and Development / The World Bank

[Economic freedom] 2008 Index of Economic Freedom, Chapter 1, Heretage Foundation

[Handbook on composite indicators 2008] = Handbook on constructing composite indicators, Joint Research Centre, European Union, OECD, p. 158

IMD World Competitiveness Yearbook 2010

Lintner, John 1965 *The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets*, Review of Economics and Statistics, 47 (1), 13-37.

Markowitz, Harry M. 1999 *The early history of portfolio theory: 1600-1960*, Financial Analysts Journal, Vol. 55, No. 4

Porter, M. E., C. Ketels and M. Delgado 2007, The Microeconomic Foundations of Prosperity: Findings from the Business Competitiveness Index, Chapter 1.2. From The Global Competitiveness Report 2007-2008, World Economic Forum.

Porter, M.E. and K. Schwab 2008, The global competitiveness report 2008-2009, World Economic Forum Geneva Switzerland.

Sala-I-Martin, X, J. Blanke, M. Hanouz, T. Geiger, I. Mia and F. Paua 2007, The Global Competitiveness Index: Measuring the Productive Potential of Nations, *The Global Competitiveness Report* 2007-2008, Hampshire: Palgrave Macmillan, 3-40.

Sharpe, William F. 1964 *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance, 19 (3), 425-442

Szerb László 2010 A magyar mikro-, kis és középvállalatok versenyképességének mérése és vizsgálata, Vezetéstudomány 41(12), pp. 20-35

A KRTI eddig megjelent műhelytanulmányai

Varga Attila: From the geography of innovation to development policy analysis: The GMR-approach (2007/1)

Bessenyei István: Növekedési pólusok a térben és a társadalomban (2007/2)

Darvas Zsolt - Schepp Zoltán: Kelet-közép-európai devizaárfolyamok előrejelzése határidős árfolyamok segítségével (2007/3)

Varga Attila: GMR-Hungary: A Complex Macro-Regional Model for the Analysis of Development Policy Impacts on the Hungarian Economy (2007/4)

Reiff Ádám - Zsibók Zsuzsanna: Az infláció és az árazási magatartás regionális jellemzői Magyarországon, mikroszintű adatok alapján (2008/1)

Varga Attila - Parag Andrea: Egyetemi tudástranszfer és a nemzetközi kutatási hálózatok szerkezete (2008/2)

Schepp Zoltán - Szabó Zoltán: Felsőoktatás-politika és állami finanszírozás: a 2007. évi felvételi tanulságai a gazdaságtudományi alapképzésben (2008/3)

Kaposi Zoltán: Város és agrárrendszer a polgárosodás korában (1850-1914) (a mezőgazdaság változásai Nagykanizsán) (2008/4)

Barancsuk János: Néhány gondolat az „árelfogadó" és „ármeghatározó" fogalmak jelentéséről (2009/1)

Kiss Gy. Kálmán: A szövetkezeti bank megteremtésének kísérlete Magyarországon (2009/2)

Zeller Gyula: Létezik-e a Smith probléma, avagy mennyire egységesek Adam Smith nézetei? (2009/3)

Járosi Péter - Atsushi Koike - Mark Thissen - Varga Attila: Regionális fejlesztéspolitikai hatáselemzés térbeli számítható általános egyensúlyi modellel: a GMR-Magyarország SCGE modellje (2009/4)

Mellár Tamás: Felemás magyar modernizáció (2009/5)

Szabó Zoltán: Az új paternalizmus: a nem-racionális hitelfelvevői magatartás és a túlzott eladósodás néhány gazdasági viselkedéstani összefüggése (2009/6)

Erdős Katalin-Varga Attila: Az egyetemi vállalkozó: legenda vagy valóság az európai regionális fejlődés elősegítésére? (2009/7)

Sebestyén Tamás: Innovation and Diversity in a Dynamic Knowledge Network. (2010/1)

Mellár Tamás: Válaszút előtt a makroökonómia? (2010/2)

Attila Varga- Dimitrios Pontikakis- George Chorafakis: Agglomeration and interregional network effects on European R&D productivity (2010/3)

Attila Varga - Péter Járosi - Tamás Sebestyén: Geographic Macro and Regional Model for EU Policy Impact Analysis of Intangible Assets and Growth (2010/4)

Rappai Gábor – Szerb László: Összetett indexek készítése új módon: a szűk keresztmetszetekért történő büntetés módszere. (2011/1)